

Anualidades contingentes

Contenido del capítulo

10.1 Probabilidad de un evento	488
10.2 Esperanza matemática.	496
10.3 Valor presente de un pago contingente	504
10.4 Tablas de mortalidad	510
10.5 Rentas vitalicias	520

En el capítulo 5 se dijo que una anualidad es *cierta* si se conocen las fechas de inicio y de terminación del plazo, es decir, el número de rentas; en tanto es *contingente* si se desconoce por lo menos una de las dos fechas. En este capítulo abordaremos tal clase de anualidades, con las que se llaman rentas *vitalicias*, que se denominan así porque se reciben o se pagan únicamente durante el tiempo en que la persona vive.



10.1 Probabilidad de un evento

¿Por qué cuando se lanza un dado algunas veces cae con el 3 en la cara superior y otras no? ¿Por qué al llegar a un crucero el semáforo está en luz verde y otras está en rojo o en color ámbar? ¿Por qué al participar en una rifa algunas veces se obtiene un premio y muchas otras no?

Se dice que situaciones como éstas se rigen por el azar, pero ¿qué es realmente el azar? Para algunos, el azar se considera la interacción de muchos factores que influyen en un resultado, argumentando que al llegar a un crucero, por ejemplo, que el semáforo esté en siga depende de circunstancias o factores como la velocidad del automóvil antes de llegar al crucero, si está o no sincronizado con los semáforos anteriores, si es el primero que está en el trayecto a la oficina o el trabajo pero, sobre todo, del tiempo programado para cada uno de los tres colores.

El cálculo de probabilidades es una poderosa herramienta para todo aquel que necesita medir qué tan probable es que un evento pueda ocurrir. Es necesario comenzar con algunas definiciones importantes.

Definición 10.1

Evento es cada uno de los resultados posibles de un *experimento*, en tanto que al conjunto de todos los resultados que pueden ocurrir se le llama *espacio muestral*.

Ejemplo 1

Arrojar al aire una moneda es un experimento con dos resultados posibles, es decir, dos eventos o sucesos, *A* de águila y *S* de sello. El espacio muestral es el conjunto {águila, sello}.

Procurando una mejor comprensión, el estudio y la didáctica de las probabilidades se fundamenta principalmente en experimentos tan simples como lanzar una moneda o un dado, extraer una carta del mazo de la baraja o sacar una esfera de una caja que contiene varias y de diferentes colores.

Existen tres enfoques al considerar o calcular la probabilidad de un evento cualquiera: el *clásico* o matemático, el *empírico* o estadístico y el subjetivo.

En el clásico se considera que todos los eventos del espacio muestral, es decir, todos los resultados son igualmente probables y por ello la probabilidad de cada uno es simplemente el cociente del número de veces en que incide el evento *A* entre el total de resultados posibles. La probabilidad del evento *A* se denota como $p(A)$, donde en el paréntesis se escribe cualquier letra que puede ser la inicial del evento o la palabra completa; también se simboliza simplemente como p . Entonces, la probabilidad del evento *A* es:

$$p(A) = \text{número de veces en que ocurre } A / \text{total de resultados posibles.}$$

Ejemplo 2

La probabilidad de que al tirar un dado normal caiga en 5 es:

$$p(C) = \frac{1}{6}, \quad p(C) = 0.166667$$

ya que la probabilidad de cualquier evento puede expresarse en porcentaje.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado resulte un número impar?

Solución

Puesto que son 3 las caras con número impar, la probabilidad es:

$$p(I) = \frac{3}{6}, \quad p(I) = 0.5$$

En el enfoque empírico o estadístico, la probabilidad se mide con base en datos históricos, es decir, de acuerdo con el número de veces en que se tuvo un resultado, luego de repetir muchas veces el experimento. Si, por ejemplo, al tirar 100 veces un dado o, lo que es lo mismo, lanzar 100 dados, en 21 cayó el número 5, entonces la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento caiga un 5 será:

$$p(C) = \frac{21}{100}, \quad p(C) = 0.21$$

siempre y cuando se mantengan, claro, las mismas condiciones del experimento.

Con este enfoque, la probabilidad del evento E será en general:

$$p(E) = \frac{\text{número de veces que ocurrió } E}{\text{número total de observaciones o ensayos}}$$

Es oportuno señalar que en el enfoque estadístico:

- Cuanto más grande sea la cantidad de veces que se repita el experimento, mayores serán la precisión y confiabilidad al calcular la probabilidad del evento.
- Como se verá después, las probabilidades que se requieren evaluar en este capítulo se fundamentan en este enfoque, lo cual lo convierte en el más importante.
- Al igual que el enfoque matemático, éste es un método objetivo.

Ejemplo 4

La profesora Laura sabe que de 30 veces que llega al primer semáforo rumbo a su trabajo, 9 está en siga, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente vez alcance el verde en dicho semáforo? Utilice el enfoque empírico.

Solución

La probabilidad que se cuestiona es:

$$p(V) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

En el enfoque subjetivo, las probabilidades se asignan con base en la experiencia de algún especialista. Un médico, por ejemplo, utiliza este enfoque cuando diagnostica alguna enfermedad y decide prescribir un tratamiento o proceder con una cirugía en el paciente.

Se emplea también este enfoque cuando se adquiere un boleto para participar en el sorteo de la Lotería Nacional.

Los números en las probabilidades

- La probabilidad de cualquier evento E estará siempre entre 0 y 1:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

- La probabilidad de un evento imposible es nula, esto es:

$$p(E) = 0 \quad \text{si} \quad E \quad \text{no puede suceder}$$

- Al contrario, la probabilidad de un evento que ocurre con toda certeza es 1. Así, la probabilidad del espacio muestral es 1.
- La probabilidad de que no ocurra un evento E es complementaria a la de que el evento ocurra, es decir:

$$p(E') = 1 - p(E) \quad \text{donde } p(E) \text{ es la probabilidad de que suceda el evento } E.$$

- La probabilidad de un evento puede expresarse como un número real entre cero y uno.

Ejemplo 5

Suponiendo que hoy es viernes, ¿cuál es la probabilidad de que mañana sea sábado?

Solución

Si hoy es viernes, con toda seguridad mañana es sábado, esto es $p(S) = 1$.

Ejemplo 6

A propósito, ¿cuál es la probabilidad de que cualquier día de la semana que se elija al azar sea viernes?

Solución

En virtud de que es igualmente probable que hoy sea cualquiera de los 7 días de la semana, la probabilidad de que sea viernes es:

$$p(V) = \frac{1}{7} = 0.142857143$$

Probabilidad de dos o más eventos

Definición 10.2

Se dice que dos eventos son *mutuamente excluyentes* si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Ejemplo 7

Si ganar una partida de ajedrez es el evento G y perderla es el evento P , entonces, G y P son mutuamente excluyentes, porque un ajedrecista no puede ganar y perder la misma partida simultáneamente.

La probabilidad de que ocurra cualquiera de dos o más eventos mutuamente excluyentes es simplemente igual a la suma de las probabilidades, es decir:

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B)$$

Ejemplo 8

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de 52 cartas resulte ser as o una carta con número par?

Solución

La probabilidad de extraer un as es $p(A) = \frac{4}{52}$ o $p(A) = \frac{1}{13}$, porque son 4 ases, y la probabilidad de sacar una carta marcada con número par es $p(B) = \frac{26}{52}$ o $p(B) = \frac{1}{2}$, porque 26 tienen número par. Entonces, la probabilidad de sacar un as o una carta con número par, puesto que son mutuamente excluyentes, es:

$$\begin{aligned} p(A \text{ o } B) &= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} \\ &= 0.576923077 \end{aligned}$$

Ejemplo 9

Llueve y hace frío no son dos eventos mutuamente excluyentes, porque puede sentirse frío cuando está lloviendo, es decir, sí pueden ocurrir al mismo tiempo.

Note que si los eventos no son excluyentes, entonces, de la suma de las dos probabilidades se resta la probabilidad de que ambos ocurran, es decir:

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ y } B)$$

Ejemplo 10

Los registros de Vialidad y Tránsito de la entidad indican que en el 36% de los accidentes el conductor no llevaba puesto su cinturón de seguridad, que el 30% manejaban con exceso de velocidad y que el 8% de los que iban a velocidad excesiva no tenían puesto su cinturón. ¿Cuál es la probabilidad de que en un accidente vial el conductor no llevaba puesto su cinturón o manejaba a exceso de velocidad?

Solución

La probabilidad de que el conductor no llevaba puesto su cinturón es $p(N) = 0.36$, $p(E) = 0.30$ es la probabilidad de que manejaba con exceso de velocidad y $p(N \text{ y } E) = 0.08$, la de manejar a exceso de velocidad sin llevar puesto el cinturón; por lo tanto, la probabilidad que se pide es:

$$p(N \text{ o } E) = 0.36 + 0.30 - 0.08 \quad p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ y } B)$$

$$p(N \text{ o } E) = 0.58$$

Definición 10.3

Se dice que dos o más eventos son *independientes* cuando la ocurrencia de uno cualquiera no afecta la ocurrencia de los otros.

Ejemplo 11

Al lanzar una moneda tres veces, que en la primera caiga águila en nada afecta el resultado de las otras dos, por eso, son tres eventos independientes.

La probabilidad de que ocurran dos eventos independientes es igual al producto de sus probabilidades, es decir:

$$p(A \text{ y } B) = p(A)p(B)$$

Ejemplo 12

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 2 canicas de una caja que contiene 5 rojas, 3 verdes y 2 negras, las dos sean rojas? Considere que hay reemplazo, es decir, la primera canica se regresa a la caja antes de sacar la segunda.

Solución

La probabilidad que la primera sea roja es $p(R_1) = \frac{5}{10}$ o $\frac{1}{2}$, ¿por qué?, en tanto que de la segunda también lo sea, puesto que la primera se ha regresado, es también $p(R_2) = \frac{1}{2}$, entonces la probabilidad de que las dos sean rojas es:

$$p(R_1 \text{ y } R_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{o bien, } 25\%$$

Note que si la primera no se regresa, entonces los eventos se vuelven dependientes y la probabilidad de que la segunda sea roja es $P(R_2) = \frac{4}{9}$, porque al sacarla quedaban 4 rojas y 9 en total en la caja. La probabilidad de que ambas sean rojas es por consecuencia:

$$p(R_1 \text{ y } R_2) = \left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{9} \quad \text{es decir, } 22.22222\% \quad \text{o bien, } 22.\bar{2}\%$$

La probabilidad en eventos dependientes se conoce como *probabilidad condicional*.

Ejercicios 10.1

1. ¿Cómo explica usted el azar?
2. Explique brevemente los conceptos de *evento*, *espacio muestral* y *experimento*.
3. Mencione tres eventos cuando saca una carta de la baraja.
4. ¿Cuál es el espacio muestral al tirar tres monedas al aire?
5. ¿Cuál es el espacio muestral al lanzar un par de dados? ¿Tres dados?
6. Para el resultado de un partido de futbol soccer, ¿cuál es el espacio muestral? ¿Para un partido de beisbol?
7. ¿Cómo son dos eventos complementarios?
8. ¿Cuál es el evento complementario del evento “hoy es martes”?
9. ¿Ganar o perder una partida de ajedrez son dos eventos complementarios?
10. ¿Cuál es el evento complementario de acreditar un examen?
11. Describa dos enfoques objetivos en el cálculo de las probabilidades.
12. ¿Por qué es errónea la afirmación “la probabilidad de obtener un premio en una rifa con 1000 números es 0.005”, habiendo 7 premios?
13. ¿Es posible que la probabilidad de un evento sea 1.005? ¿1.00038%?
14. ¿Cuál es la probabilidad de que el 20 de junio llueva en la ciudad si los registros indican que en esta fecha el 28.5% de los días no ha llovido?
15. Sin tomar en cuenta otros factores, ¿cual será la probabilidad de alcanzar un semáforo en luz verde si está programado para permanecer 3 minutos en rojo, 1.5 minutos en verde y 5 segundos en preventiva?
16. Si de 50 veces que se tiró un dado, en 32 cayó con un número par en la cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente vez que se lanza, en las mismas condiciones, caiga un número impar según el enfoque empírico? ¿Según el clásico? ¿Según el subjetivo?
17. En el ejercicio 16, ¿cuál será la probabilidad de que caiga un número menor o igual a 4 con el enfoque clásico?
18. Resuelva el ejercicio 17 con el enfoque estadístico si se sabe que de las 50, 4 veces cayó en 5 y 8 veces cayó en 6.
19. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un par de monedas las dos caigan con igual cara? ¿Con cara diferente?
20. Si se tiran 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean cuatros?
21. ¿Qué factores tomaría usted en cuenta para calcular la probabilidad de que su equipo favorito de futbol gane su siguiente compromiso?
22. Se sabe que el 15% de los que inician una carrera profesional no la concluyen. ¿Qué probabilidad tiene usted de terminarla si recién la comenzó?
23. Si la probabilidad de que usted acredite el curso de Matemáticas financieras es 0.92, ¿cuántos de 125 alumnos la acreditaron en condiciones semejantes?
24. De 50,000 personas de 30 años de edad, 43,750 celebraron su 65 aniversario. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan López, de 30 años y del mismo grupo de personas, haya llegado a los 65?

25. La probabilidad de acreditar Estadística es 0.75 y la de acreditar Administración es 0.87. ¿Cuál es la probabilidad de acreditar las dos? ¿Exactamente una de las dos? ¿De acreditar al menos una de las dos? Considere que el 5% reprueba sólo Administración. Sugerencia: use teoría de conjuntos, diagramas de Venn en particular.
26. En el ejercicio 25, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante continúe sus estudios si sabe que si reprueba las dos no continuará?
27. ¿Cuál es la probabilidad de que el día de mañana sea viernes?
28. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy sea 15 de enero?
29. Teresa participa en una interesante promoción de conocida marca de higiénicos y desechables, la cual consiste en acertar el número de artículos que caben en un automóvil compacto. El premio es el propio automóvil. ¿Cuál es la probabilidad de llevárselo si sabe que el número de artículos está entre 375 y 725, inclusive, y sólo participó con 3 números, uno por cada boleto de compra?
30. ¿Con cuántas notas de compra deberá participar Teresa, del ejercicio 29, para asegurar quedarse con el automóvil si no hay otro ganador?
31. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as al tomar una carta de una baraja de 52?
32. En el ejercicio 31, ¿cuál es la probabilidad de extraer un rey de bastos?
33. Si se sacan 2 cartas de la baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean nueves? Suponga que la primera se regresa antes de sacar la segunda y después, que la primera no regresa.
34. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo 24 de junio llueva en la ciudad si se sabe que de los 40 años que se tienen registros, 35 ha llovido en esa fecha?
35. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 43 años de edad celebre su 45 aniversario si se sabe que de 95,106 en el mismo conglomerado social, 93,694 lo han logrado?
36. De 24 veces que el campeón nacional de ajedrez se ha enfrentado con su acérrimo rival, en 15 lo ha derrotado, ¿cuál es la probabilidad de que en el siguiente enfrentamiento no lo derrote?
37. En el ejercicio 36, ¿cuál es la probabilidad de que empaten si el campeón ha perdido sólo tres de sus enfrentamientos con el susodicho rival?
38. Si de los 129 días que llueva en la ciudad, en 25 hace frío, ¿cuál es la probabilidad de que mañana llueva y no haga frío? Considere que el año tiene 365 días. Vea la sugerencia del ejercicio 25.
39. Una caja contiene 4 canicas de color azul, 5 de color verde y 7 de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar 2 canicas:
- a) las dos sean blancas?
 - b) una sea azul y la otra sea blanca?
 - c) las dos sean de igual color?
 - d) la primera sea roja y la segunda sea blanca?
 - e) una sea blanca y la otra sea verde?
40. Si de un grupo de 90 alumnos de primer ingreso, 25 estudian contaduría, 35 son de ingeniería, 18 de medicina y el resto de actuaría, uno de ellos obtuvo una beca del 100% para continuar sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que ese alumno:
- a) estudia ingeniería?
 - b) no estudia medicina?
 - c) estudia contaduría o actuaría?
 - d) es de actuaría o no es de ingeniería?
 - e) no es de ingeniería ni de medicina?

41. Diga si los cuatro eventos en el ejercicio 40 son:

- a) mutuamente excluyentes.
- b) eventos independientes. Justifique sus respuestas.

42. Al lanzar al aire una moneda 3 veces se presentan las siguientes probabilidades $P(N)$, donde N es el número de águilas.

$$p(0) = 0.125 \qquad p(1) = 0.375 \qquad p(2) = 0.375 \qquad \text{y} \qquad p(3) = 0.125$$

Determine la probabilidad de que caigan:

- a) una o 3 águilas.
- b) más de 2 águilas.
- c) 2 o 3 sellos.
- d) 3 y 2 águilas.
- e) al menos un sello.

43. Suponiendo que $p(A) = 0.75$, $p(B) = 0.60$ y $p(A \text{ y } B) = 0.45$, determine:

- a) ¿ A y B son mutuamente excluyentes? Vea la sugerencia del ejercicio 25.
- b) $p(A \text{ o } B)$
- c) $p(A' \text{ y } B)$
- d) $p(A \text{ y } B')$

En los ejercicios 44 a 60, seleccione la respuesta correcta. Justifique su elección.

44. La probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de 52 sea roja es:

- a) $\frac{1}{13}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{1}{26}$
- e) Otra: _____

45. La probabilidad de que mañana sea el decimotercer día del mes de 30 días es:

- a) $\frac{13}{30}$
- b) $\frac{1}{7}$
- c) $\frac{17}{30}$
- d) $\frac{1}{30}$
- e) Otra: _____

46. La probabilidad de que al sacar una esfera de una caja que contiene 8 blancas, 5 negras y 4 rojas, sea negra es:

- a) $\frac{5}{12}$
- b) $\frac{5}{17}$
- c) $\frac{5}{8}$
- d) $\frac{12}{17}$
- e) Otra: _____

47. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al mismo tiempo 2 esferas de la caja del ejercicio 46, las dos sean blancas?

- a) $\frac{7}{34}$
- b) $\frac{15}{33}$
- c) $\frac{64}{289}$
- d) $\frac{8}{17}$
- e) Otra: _____

48. Las probabilidades de que no haya accidentes automovilísticos entre la 1:30 y las 4:30 de la mañana en un fin de semana son 0.01, y de que haya 1, 2, 3, 4, 5 o 6 accidentes son, respectivamente, 0.08, 0.11, 0.19, 0.18, 0.17 y 0.07. ¿Cuál es la probabilidad de que un fin de semana cualquiera en ese horario de la madrugada haya más de 4 accidentes?

- a) 11%
- b) 18%
- c) 36%
- d) 43%
- e) Otra: _____

49. En el ejercicio 48, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 6 accidentes?

- a) 19%
- b) 81%
- c) 23%
- d) 0%
- e) Otra: _____

50. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 o menos accidentes con los datos del ejercicio 48?

- a) 39%
- b) 45%
- c) 26%
- d) 19%
- e) Otra: _____

51. Con los datos del ejercicio 48, determine la probabilidad de que haya de 3 a 5 accidentes.
 a) 46% b) 18% c) 35% d) 54% e) Otra: _____
52. ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan exactamente 4 accidentes en el ejercicio 48?
 a) 0% b) 17% c) 18% d) 82% e) Otra: _____
53. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran accidentes con los datos del ejercicio 52?
 a) 99% b) 8% c) 13% d) 81% e) Otra: _____
54. El Instituto Meteorológico informa que existen probabilidades del 43% de que el fin de semana llueva en la ciudad. Carlos considera que tiene 78% de probabilidad de acreditar un examen de matemáticas básicas el siguiente lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos acredite el examen habiendo llovido el fin de semana?
 a) 29.61% b) 35% c) 33.54% d) 47.43% e) Otra: _____
55. Si en el ejercicio 54 se considera que el 10% de los alumnos que presenten examen el lunes lo reprueben si llovió el fin de semana anterior, ¿cuál es la probabilidad de que Carlos lo repruebe o no haya llovido el fin de semana, es decir, $P(L' \text{ o } A')$?
 a) 69% b) 23.54% c) 7.9% d) 79.25% e) Otra: _____
56. Si la probabilidad de que una quinceañera cumpla los 45 años de edad es 0.95 y la probabilidad de tener un buen empleo en esos tiempos es 0.78, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla los 45 teniendo un buen empleo?
 a) 173% b) 74.10% c) 17% d) 64.83% e) Otra: _____
57. Resuelva el ejercicio 56 considerando que de 250 quinceañeras 225 llegan a los 45 años de edad y solamente 175 logran un buen empleo.
 a) 63% b) 37% c) 80% d) 75% e) Otra: _____
58. En el ejercicio 57, ¿cuál es la probabilidad que tiene una quinceañera de lograr un buen empleo o cumplir los 45 años de edad? Suponga que el 63% cumple los 45 años y tiene buen empleo.
 a) 97% b) 1.6% c) 27% d) 160% e) Otra: _____
59. Se lanzan dos monedas y un dado juntos, ¿cuál es la probabilidad de que caigan 2 águilas y un 3?
 a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{3}{10}$ e) Otra: _____
60. En el ejercicio 59, ¿cuál es la probabilidad de que resulten las monedas con cara diferente y el dado en un número menor que 3?
 a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{3}{8}$ e) Otra: _____



10.2 Esperanza matemática

Supóngase que la universidad otorga un premio, digamos de 25 mil pesos, a uno de los 20 profesores del departamento de matemáticas, precisamente el que acumule el mayor número de puntos logrados durante el semestre por su buen desempeño académico. Considerando que todos tienen las mismas posibilidades, la probabilidad que tiene cada profesor de ganar el premio es $p(G) = \frac{1}{20}$ o 0.05. Al multiplicar

la probabilidad por el valor del premio, se obtendrá lo que se conoce como *esperanza matemática* o *valor esperado*, que en este supuesto caso es:

$$V = 0.05(25,000) \quad \text{o bien,} \quad \$1,250$$

Definición 10.4

Esperanza matemática es el producto del valor esperado $E(X)$ por su probabilidad p . Si se aplica a un *precio* de un evento aleatorio, deberá expresarse en unidades monetarias.

Cuando son varios premios o cantidades de dinero M_1, M_2, \dots, M_n , con sus respectivas probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n , la *esperanza matemática* está dada por la suma de productos:

$$V = p_1(M_1) + p_2(M_2) + \dots + p_n(M_n).$$

Para el ejemplo que nos ocupa, podría decirse que la esperanza matemática es el *precio justo* que debe pagarse al esperar la realización de un suceso aleatorio o sujeto al azar, está dada por la multiplicación de la probabilidad de tal evento incierto $p(E)$ o p y la cantidad de dinero M que se espera recibir si se realiza, es decir:

$$V = (p)(M) \quad \text{o bien,} \quad V = [p(E)](M)$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor esperado para cada uno de los 118 empleados de una distribuidora de automóviles, que los premia con un automóvil de \$168,750?

Solución

La probabilidad que cada empleado tiene de sacarse el automóvil es $p(A) = \frac{1}{118}$; la esperanza matemática es, por lo tanto:

$$V = \left(\frac{1}{118}\right)(168,750)$$

$$V = (0.008474576)(168,750)$$

$$V = 1,430.084746 \quad \text{o bien, redondeando} \quad \$1,430.08$$

Ejemplo 2

En el ejemplo 1, ¿cuál es la esperanza matemática de cada empleado si además del automóvil, la empresa los premia con 30 televisores de \$6,450 y 50 hornos de microondas de \$1,140 cada uno? Considere que cualquier empleado puede lograr más de un premio.

Solución

La probabilidad de ganarse un televisor es $\frac{30}{118}$ y un horno es $\frac{50}{118}$, entonces, la esperanza matemática para el empleado es:

$$V = \left(\frac{1}{118}\right)(168,750) + \left(\frac{30}{118}\right)(6,450) + \left(\frac{50}{118}\right)(1,140)$$

$$V = 1,430.0847 + 1,639.8305 + 483.058$$

$$V = 3,552.966 \quad \text{o bien,} \quad \$3,552.97$$

Ejemplo 3

El Instituto para la Prevención y el Tratamiento de Adicciones organiza una rifa con un premio principal de medio millón de pesos, 2 de \$150,000 y 5 de \$25,000 cada uno. ¿Cuál es la esperanza matemática, es decir, el precio justo, por cada boleto si se emitieron 100,000?

Solución

La probabilidad de obtener el primer premio es:

$$p(A) = \frac{1}{100,000}$$

Para uno de los premios de \$150,000 deberá ser $\frac{2}{99,999}$ y para los 5 de \$25,000 la probabilidad debería ser $\frac{5}{99,997}$, ¿por qué?; pero para efectos prácticos, cuando el espacio muestral, el número de resultados posibles es muy grande, las probabilidades se calculan con el mismo denominador, todos con 100,000. Así, el precio justo, en miles de pesos, es:

$$V = \left(\frac{1}{100,000}\right)500 + \left(\frac{2}{100,000}\right)150 + \left(\frac{5}{100,000}\right)25$$

$$V = 0.005 + 0.003 + 0.00125$$

$$V = 0.00925 \quad \text{o bien,} \quad \$9.25$$

Quiere decir que con este precio para cada boleto las utilidades para el Instituto serán nulas, no tendría razón de ser la rifa, pero por cada peso en que se incremente este precio sus utilidades crecerán, claro.

Ejemplo 4

Un inversionista tiene 0.45 de probabilidades de ganar \$600,000 y 0.55 de perder \$175,000 en sus inversiones, ¿cuál es la utilidad esperada?

Solución

Puesto que las pérdidas son ganancias negativas, la esperanza matemática, es decir, la utilidad esperada para el inversionista es:

$$V = 0.45(600,000) + 0.55(-175,000)$$

$$V = 270,000 - 96,250 \quad \text{o bien,} \quad V = \$173,750$$

Ejemplo 5

En un juego de azar con 2 dados, un jugador gana \$750 si al tirarlos la suma da 5 puntos o menos, y pierde \$150 en cualquier otro resultado. ¿Cuál es la esperanza matemática?

Solución

Las combinaciones posibles para que las 2 caras caigan sumando 5 o menos puntos son 10; éstas son:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

y el total de resultados posibles es 36, porque si el primer dado es 1, el segundo puede ser cualquiera de los 6 y lo mismo sucede si el primero es 2, 3, 4, 5 o 6, entonces, la probabilidad de obtener 5 o menos puntos es:

$$p(G) = \frac{10}{36} \quad \text{o bien,} \quad \frac{5}{18}$$

y ésta es la probabilidad que el jugador tiene de ganar, en tanto que la de perder es el complemento, es decir:

$$p(G') = 1 - \frac{5}{18} \quad \text{o bien,} \quad p(G') = \frac{13}{18}$$

Entonces, la esperanza matemática es:

$$V = \left(\frac{5}{18}\right)750 + \left(\frac{13}{18}\right)(-150)$$

$$V = 208.33 - 108.33 \quad \text{o bien,} \quad V = \$100.00$$

Ejemplo 6

¿Cuál es la esperanza matemática para un cliente que por cada \$500 de compra participa en la rifa de una computadora portátil con valor de \$18,350? Considere que se gana con las 4 últimas cifras del premio mayor de la Lotería Nacional.

Solución

La probabilidad de ganar es $p(G) = \frac{1}{10,000}$, ya que se emitieron 10 mil boletos, ¿por qué?, y la de perder es $p(G') = \frac{9,999}{10,000}$, entonces, el valor esperado es:

$$V = \left(\frac{1}{10,000}\right)(18,350) + \left(\frac{9,999}{10,000}\right)(0)$$

$$V = \$1.835$$

ya que el comprador no pierde, porque los \$500 los gastó en mercancía.

Ejercicios 10.2

1. ¿Qué otro nombre recibe la esperanza matemática?
2. ¿En qué unidades se expresa la esperanza matemática?
3. ¿De qué elementos o valores depende la esperanza matemática?
4. La probabilidad de recibir \$50,000 es 78.3%, ¿cuál es el valor esperado?
5. La probabilidad que Lupita tiene de lograr el primer lugar en el maratón de la ciudad es del 35.6%. ¿Cuál es el valor esperado si se ofrece un premio de \$175,000 al ganador?
6. ¿Cuál es la esperanza matemática para Lupita del ejercicio 5 si la probabilidad que tiene de llegar en la primera posición es de sólo el 5.03%?
7. El señor González recibirá una bonificación de \$25,000 si llega a los 5 años en la compañía donde labora. ¿Cuál es la esperanza matemática si se sabe que de cada 25 empleados 22 lo logran?
8. ¿Cuál es el valor esperado para quien adquiere un boleto para una rifa de \$35,000, si se emitieron 1,000?
9. Un padre de familia premia a sus hijos que logran un promedio mínimo de 9.5 al final del semestre con \$15,000. ¿Cuál es la esperanza matemática?

Considere que el 70.3% de los estudiantes alcanzan este promedio.

10. ¿Qué probabilidad tiene una persona de lograr un premio de \$75,000 si el valor esperado es de \$33,500?
11. ¿Con cuánto bonificarán a un empleado si el valor esperado con una probabilidad del 47% es de \$12,105.50?
12. ¿Qué probabilidades tiene el empleado del ejercicio 11 si el valor esperado fuera de \$5,922.50?
13. La universidad premia a sus profesores con un automóvil de \$253,000, 20 artículos electrónicos de \$5,300 cada uno, 40 de \$1,500 y 75 de \$450. ¿Cuál es el valor esperado si son 4,200 docentes?
14. En el ejercicio 13, ¿cuál será el valor esperado si hubiese 100 premios de \$5,000 cada uno, además del automóvil?
15. El Instituto de Investigación Oncológica organiza una rifa de \$250,000. ¿Cuál es el valor esperado para quien participa con un boleto si son 1,000 y cada uno tiene un costo de \$500?
16. En el ejercicio 15, ¿cuál es el valor esperado para el Instituto?
17. ¿Qué significa que el valor esperado sea negativo?
18. Un inversionista tiene el 42% de probabilidades de ganar \$350,000 y 58% de perder \$125,000, ¿cuál es su valor esperado?
19. ¿Cuál es la esperanza matemática para un jugador que gana \$200 si al tirar 2 dados la suma resulta de 9 puntos o más, y pierde \$75 en caso contrario?
20. ¿Cuál es la probabilidad de perder \$50 para un participante en juegos de azar si la probabilidad de ganar \$175 es 40% y el valor esperado es de \$47.50?
21. El valor esperado para una persona que tiene probabilidades de ganar \$75,000 es de \$28,875. ¿Cuál es la probabilidad de lograrlo?

- 22.** Un par de amigos hacen una apuesta tirando una moneda; el que pierda le dará \$20 al que gane. ¿Cuál es el valor esperado para el que gana?
- 23.** La nueva generación de ingenieros civiles está conformada por 20 alumnos, quienes organizan un sorteo rifando \$20,000 para sus gastos de graduación, emitiendo mil boletos de \$100 cada uno. Determinar:
- La esperanza matemática para el comprador de un boleto.
 - El valor esperado para un compañero que se quedó con todos sus boletos. Considere que se los repartieron en partes iguales.
 - El valor esperado para otro que vendió sólo el 60% de sus boletos.
 - Si Sergio, otro compañero, se queda con los mil boletos, ¿cuál será la esperanza matemática?
- 24.** Treinta amigos organizan una rifa con un premio de \$40,000, 2 de \$10,000 y 5 de \$5,000 cada uno, ¿cuál es la esperanza matemática para cada uno? ¿Cuánto debe aportar cada uno de los perdedores? ¿Cuál debe ser el precio del boleto? Suponga, claro, que la rifa es entre ellos mismos.
- 25.** Una distribuidora de vinos y licores organiza una rifa, entre sus 20 mejores clientes, con un premio de \$20,000, otro de \$10,000 y 2 de \$5,000 cada uno. ¿Cuál es el valor esperado para cada uno de los 20 clientes?
- 26.** El Instituto Cultural del Sur organiza un sorteo, emitiendo 10 mil boletos numerados, para rifar automóviles y camionetas, uno de \$425,000, dos de \$197,500 y siete de \$82,750. ¿Cuál es la esperanza matemática para el comprador de un boleto si cada uno cuesta \$50?
- 27.** En el ejercicio 26, ¿cuál es la esperanza matemática para el Instituto?
- 28.** ¿Cómo explica usted que la esperanza matemática resultó negativa en el ejercicio 27? ¿Qué indicaría si fuese positiva?
- 29.** Se tiran tres dardos a una ruleta circular, una tabla de madera que tiene 36 sectores del mismo tamaño en la feria de la ciudad. ¿Cuál es el valor esperado para el propietario si ofrece un premio de \$20, dos de \$10 y tres de \$5 cada uno, marcados en la ruleta? Considere que el costo para el participante es de \$20 por las tres oportunidades.
- 30.** En el ejercicio 29, ¿cuál es el valor esperado para el que participa?
- Seleccione la opción correcta, justificándola, en los ejercicios 31 a 56.
- 31.** ¿Cuál es su respuesta en el ejercicio 29 si el disco tuviera 48 sectores iguales?
- a) \$16.0325 b) \$14.0625 c) \$20.1585 d) \$9.0825 e) Otra: _____
- 32.** Si el precio de cada tiro en el ejercicio fuera de 5 pesos, ¿cuál es la esperanza matemática para el jugador?
- a) -\$8.6255 b) -\$12.0457 c) -\$10.875 d) -\$9.6875 e) Otra: _____
- 33.** ¿Cuál es el valor esperado para cada empleado de Tractocamiones de Occidente si en la próxima posada serán gratificados con un premio de \$30,000, 3 de \$15,000 y 5 de \$10,000? Considere que son 30 los que participan y pueden llevarse más de un premio.
- a) \$4,166.67 b) \$3,750.00 c) \$4,233.33 d) \$5,065.33 e) Otra: _____
- 34.** ¿Cuál es el valor esperado en el ejercicio 33 si los 9 premios fueran de \$20,000 cada uno?
- a) \$4,500.00 b) \$5,250.00 c) \$3,766.67 d) \$4,633.33 e) Otra: _____

35. ¿Qué conviene más a los empleados de la empresa camionera del ejercicio 33, 10 premios de \$20,000 cada uno o 2 de \$40,000, 3 de \$30,000 y 5 de \$15,000 cada uno, pero con un costo por participar de \$1,000 para cada empleado? Resuelva empleando esperanza matemática.
- a) La primera opción b) La segunda c) Es indiferente d) Ninguna de las 2 e) Otra: _____
36. ¿Cuál es el precio justo por cada uno de los 100,000 boletos que emite la Universidad del Norte en su sorteo semestral, con un primer premio consistente en una casa de \$5'695,000, un segundo, por un departamento de \$1'425,000 y un tercer premio por un automóvil de \$205,000?
- a) \$81.75 b) \$68.50 c) \$73.25 d) \$76.98 e) Otra: _____
37. ¿Cuál es la esperanza matemática para el señor Álvarez si la empresa donde labora le ofrece \$30,000 si logra permanecer 7 años a su servicio? Considere que de 15 empleados, 12 lo han logrado.
- a) \$18,000 b) \$24,000 c) \$15,000 d) \$6,000 e) Otra: _____
38. La contadora Lulú tiene 65% de probabilidades de perder \$75,000 y 35% de ganar \$275,000 en sus inversiones. ¿Cuál es el valor esperado?
- a) \$47,500 b) \$42,250 c) \$49,500 d) \$45,750 e) Otra: _____
39. Sus amigos apuestan \$500 por su equipo favorito, ¿cuál es el valor esperado para cada uno de ellos? Suponga que si empatan, ninguno gana.
- a) \$425 b) \$150 c) \$250 d) \$500 e) Otra: _____
40. ¿Qué probabilidades tiene una persona de ganar un premio de \$50,000 si el valor esperado es de \$8,750?
- a) 43.75% b) 22.5% c) 4.375% d) 17.5% e) Otra: _____
41. La esperanza matemática para el señor Pérez de ganar un premio es de \$7,200. ¿De cuánto es el premio si sabe que tiene 0.18% de probabilidades de ganarlo?
- a) \$12,960 b) \$40,000 c) \$65,000 d) \$48,000 e) Otra: _____
42. La Universidad otorga una beca por \$250,000 para estudiar un posgrado a los alumnos que terminan su licenciatura con promedio mínimo de 9.75. ¿Cuál es la esperanza matemática si los registros indican que sólo el 2% alcanza la meta?
- a) \$50,000 b) \$5,000 c) \$12,500 d) \$25,000 e) Otra: _____
43. ¿Cuál es el precio justo que debe pagarse por un boleto para participar en el sorteo de un automóvil de \$156,000, 3 pantallas de plasma de \$36,000 y 5 computadoras portátiles de \$19,350? Suponga que se emiten 100,000 boletos.
- a) \$3.6075 b) \$5.4250 c) \$10.9650 d) \$7.7525 e) Otra: _____
44. ¿Cuál es la esperanza matemática de conseguir el precio de \$25,000 en una rifa que organizan 10 amigos, participando con \$2,500 cada uno?
- a) \$125 b) \$0.00 c) \$250 d) -\$125 e) Otra: _____
45. De 95,105 individuos de 39 años de edad, 88,008 celebran su aniversario número 54. ¿Cuál es la esperanza matemática para una persona de 39 años de cobrar un seguro por \$350,000 al cumplir los 54?
- a) \$323,882.03 b) \$122,429.05 c) \$225,350.00 d) \$175,000.00 e) Otra: _____

46. En el ejercicio 45, ¿cuál es el monto del seguro si la esperanza matemática es de \$138,806.58?
- a) \$176,429.65 b) \$223,295.61 c) \$150,000 d) \$348,693.75 e) Otra: _____
47. La Secretaría de Gobernación autoriza un sorteo si la esperanza matemática para el comprador de un boleto no es menor de -\$100.00. Una institución emite 10,000 boletos para sortear una camioneta de \$225,000 y computadoras de \$17,750 cada una. ¿Cuántas debe rifar para cumplir con el registro, suponiendo que cada boleto tiene un costo de \$300?
- a) 150 b) 90 c) 100 d) 120 e) Otra: _____
48. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un premio de \$169,650 si el valor esperado es de \$17,440.02?
- a) 10.28% b) 9.63% c) 12.48% d) 8.23% e) Otra: _____
49. La esperanza matemática de obtener un automóvil de \$95,000 en un sorteo es de -\$231. ¿Cuántos boletos se emitieron si cada uno tiene un costo de \$250?
- a) 4,000 b) 5,000 c) 10,000 d) 2,500 e) Otra: _____
50. ¿Cuál es la utilidad esperada para el contador Campos si la probabilidad de ganar \$450,000 en su inversión es del 38% y de perder \$95,000 es de 62%?
- a) \$112,100 b) \$125,200 c) \$40,050 d) \$95,360 e) Otra: _____
51. Tres estudiantes tiran al aire una moneda de tal manera que aquel que logre una cara diferente a las otras dos paga la comida para los tres, cuyo costo es de \$450. ¿Cuál es el valor esperado para el perdedor?
- a) -\$300 b) -\$225 c) -\$150 d) -\$450 e) Otra: _____
52. Un padre de familia concede en premio un automóvil a uno de sus 4 hijos, el que obtenga el mejor promedio en el semestre. ¿Cuál es la esperanza matemática si el precio del automóvil es de \$108,250?
- a) \$36,083.33 b) \$54,125.00 c) \$21,650.00 d) \$27,062.56 e) Otra: _____
53. Obtenga el precio justo para cada boleto de los 1,000 que se emitieron para un sorteo de una camioneta de \$328,000 y un automóvil de \$123,450.
- a) \$451.45 b) \$902.90 c) \$425.00 d) \$250.00 e) Otra: _____
54. El Instituto de Estudios Superiores del Sur premia con \$35,000 al docente que alcanza la mayor puntuación en su desempeño académico del semestre. ¿Cuál es el valor esperado si son 65 profesores?
- a) \$538.46 b) \$629.45 c) \$463.08 d) \$505.95 e) Otra: _____
55. La utilidad esperada para una persona que tiene 29% de probabilidades de ganar \$1'100,000 y de perder x pesos es de \$212,500.00. ¿Cuál es el valor de x ?
- a) \$150,000 b) \$120,000 c) \$138,929.43 d) \$165,000.00 e) Otra: _____
56. ¿Cuál es la esperanza matemática del señor Luna para cobrar un seguro de \$750,000 si cumple 55 años de edad? Suponga que tiene 29 años y que de cada 8,000 personas que tienen esa edad, 7,250 llegan a los 55.
- a) \$605,928.61 b) \$598,708.33 c) \$679,687.50 d) \$563,429.45 e) Otra: _____



10.3 Valor presente de un pago contingente

Una de las aplicaciones de la esperanza matemática, la que aquí nos interesa, sirve para calcular el valor presente de una cantidad de dinero, o monto M , que después de cierto tiempo es probable se reciba. El cálculo de la prima de un seguro de vida es un claro ejemplo de esta situación.

Teorema 10.1

Si p es la probabilidad de recibir una cantidad de dinero M , después de n años, entonces, su valor actual es:

$$C = p(M)(1 + i)^{-n}$$

donde i es la *tasa de interés técnica* anual.

Observe que esta ecuación es una adecuación de la fórmula del interés compuesto

$$M = C \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{np} \quad \text{o bien,} \quad C = M \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{-np}$$

donde la frecuencia de conversión es $p = 1$, y el monto M que algunos llaman *dotal puro* es afectado por un factor p , que es la probabilidad de recibir, u otorgar, el monto M en un futuro.

La tasa de interés i es determinada por las aseguradoras, en el caso de los seguros de vida, y es determinante en el valor actual del pago contingente, M , porque, como es evidente, mientras menor sea esta tasa, mayor será dicho valor actual y más alta será la prima del seguro.

Ejemplo 1

La universidad premia con \$60,000 a cada profesor que cumple 15 años a su servicio. ¿Cuál es el valor presente al ser contratado si se estima que el dinero reditúa con el 8.4% efectivo y sólo el 65% de los docentes celebran ese tiempo en la institución?

Solución

Puesto que $M = 60,000$ es el monto, $p = 0.65$ es la probabilidad de que un profesor se mantenga en la institución, $n = 15$ es el plazo en años e $i = 0.084$ es la tasa de interés, el valor actual es:

$$\begin{aligned} C &= 0.65(60,000)(1.084)^{-15} & C &= p(M)(1 + i)^{-n} \\ C &= 39,000(0.298236482) \\ C &= 11,631.22278 \quad \text{o bien, redondeando} & \$11,631.22 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

El padre de un estudiante le ofrece un incentivo adicional de \$85,000 si logra terminar su carrera profesional en 8 semestres. ¿Cuál es el valor presente al iniciar los estudios universitarios, si las estadísticas revelan que sólo el 73% de los estudiantes que comienzan terminarán una carrera y la tasa de interés es del 13.3% efectiva anual?

Solución

Los valores a reemplazar en la ecuación del teorema 10.1 son:

$i = 0.133$, la tasa anual efectiva.

$p = 0.73$, la probabilidad de terminar la carrera.

$M = 85,000$, la cantidad del premio al final de sus estudios.

$n = 4$, el plazo en años, equivalente a 8 semestres.

El valor presente es, entonces:

$$C = 0.73(85,000)(1.133)^{-4}$$

$$C = 62,050(0.606848609)$$

$$C = 37,654.95616 \quad \text{o bien,} \quad \$37,654.96$$

Como siempre, pueden calcularse cualquiera de las variables que componen una fórmula, dadas las restantes.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante concluya una carrera profesional, si el valor presente de los \$150,000 con los que el Instituto de Promoción y Desarrollo premia al mejor estudiante para continuar sus estudios de posgrado es de \$61,361.00? Considere un tipo de interés técnico anual del 8.5% y que la carrera dura 9 semestres.

Solución

Ahora la incógnita es p , la probabilidad, que se despeja de la ecuación siguiente, la que resultó de sustituir los datos en el teorema 10.1.

$$61,361 = p(150,000)(1 + 0.085)^{-4.5}$$

$$61,361 = p(150,000)(0.692733481)$$

de donde:

$$p = \frac{61,361}{103,910.02221}$$

$$p = 0.590520517 \quad \text{o bien,} \quad 59.052\% \text{ aproximadamente.}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es el valor presente de los \$125,000 que una compañía de la industria de la computación otorga a sus empleados que sobreviven y se mantienen fieles hasta los 50 años de edad, si se sabe que sólo el 45% lo logra? Considere el caso de un empleado que tiene 32 años de edad y un tipo de interés técnico del 10.2% anual.

Solución

El plazo es la diferencia $50 - 32 = 18$ años y el valor presente es:

$$C = 0.45(125,000)(1.102)^{-18}$$

$$C = 56,250(0.174072954)$$

$$C = 9,791.603651 \quad \text{o bien,} \quad \$9,791.60$$

Es importante señalar que, en el ámbito de los seguros de vida, en la fórmula del teorema 10.1

$$C = p(M)(1 + i)^{-n} \quad \text{o bien,} \quad C = M[p(1 + i)^{-n}]$$

Al factor que está entre los corchetes, le llaman *factor de actualización demográfico-financiero*, que es menor que el llamado *factor de actualización financiera pura*, $(1 + i)^{-n}$, porque p , la probabilidad, es siempre menor que la unidad.

Ejemplo 5

¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero para una tasa de interés técnico del 6.5% a 13 años de plazo y una probabilidad de 62.7% de lograr un monto?

Solución

Este factor es:

$$\begin{aligned} FADF &= 0.627(1 + 0.065)^{-13} & FADF &= p(1 + i)^{-n} \\ &= 0.627(0.441016765) \end{aligned}$$

$$\text{o bien,} \quad FADF = 0.276517512$$

Ejemplo 6

Si el valor presente de un monto M de \$450,000 es $C = 12,981.23$, ¿cuál es la tasa de interés técnico anual si el plazo es de 45 años y la probabilidad de lograr el monto dado es del 69.3%? ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero? ¿Cuál es el de actualización financiera pura?

Solución

a) Si $C = M[p(1 + i)^{-n}]$, entonces, al sustituir los valores que se dan queda:

$$12,981.23 = 450,000(0.693)(1 + i)^{-45}$$

de donde:

$$(1 + i)^{-45} = \frac{12,981.23}{(450,000)(0.693)}$$

$$(1 + i)^{-45} = 0.041626519$$

$$(1 + i)^{45} = 24.02314727 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$i = \sqrt[45]{24.02314727} - 1$$

$$i = 0.073200001 \quad \text{o bien,} \quad 7.32\%$$

b) El factor de actualización demográfico financiera es:

$$FADF = \frac{12,981.23}{450,000} \quad \text{es igual a } \frac{C}{M}, \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= 0.028847178$$

Se deja como ejercicio comprobarlo con $p(1+i)^{-n}$

c) El factor de actualización financiera pura es:

$$(1+i)^{-n} = (1.0732)^{-45} \quad \text{o bien, } 0.041626652$$

que, como se dijo, es mayor que el primero.

Ejercicios 10.3

1. ¿Cómo se evalúa el valor actual de un pago contingente?
2. ¿De qué factores depende el valor presente de un pago contingente?
3. ¿Cómo se denomina el tipo de interés para un pago contingente?
4. ¿Qué pasa con el valor actual de un pago contingente si aumenta la tasa de interés anual?
5. ¿A cuál de las dos opciones corresponde menor pago contingente considerando que el plazo es de 5 años y el monto es de \$15,250?
 - a) Tasa de interés del 8.2% anual y probabilidad de 21.3%.
 - b) Probabilidad del 23.5%, y el 10.5% de interés técnico anual.
6. ¿Cuál es el valor del pago contingente en las opciones del ejercicio 5 si su valor actual fuera de \$22,000 en los dos casos?
7. El Instituto Superior de Estudios Computacionales otorga un premio de \$75,000 al profesor que permanece durante 15 años a su servicio. ¿Cuál es el valor presente si se sabe que de 200 docentes sólo 78 lo logran? Considere un tipo de interés técnico del 10.8% anual.
8. En el ejercicio 7, ¿qué monto se daría al docente si el valor actual es de \$9,250?
9. En el ejercicio 7, ¿por cuántos años de servicio en el Instituto un profesor logra el premio si el valor actual es de \$3,761.24?
10. ¿De cuánto es el premio que una compañía ofrece a sus empleados que logran permanecer en la empresa hasta los 56 años de edad si el valor presente para uno que tiene 27 años de edad es de \$939.22? Considere el 11.4% de interés técnico anual y que el 43% permanecen hasta esa edad teniendo los mismos 27 años.
11. En el ejercicio 10, ¿cuál es el valor presente del incentivo para un empleado que tiene 35 años si se sabe que el 47.3% llega a los 56 en la compañía?
12. Las estadísticas revelan que el 79.3% de los estudiantes de ingeniería que inician una carrera la terminan. ¿De qué precio será el automóvil que su familia dará a Rebeca si el valor presente al comenzar los 9 semestres es de \$86,275? Suponga el 9.8% de interés técnico anual.
13. En el ejercicio 12, ¿de cuánto es el valor actual del premio si se sabe que de 250 estudiantes sólo 210 terminan?

14. En el ejercicio 12, ¿cuál será el porcentaje de estudiantes que terminan la carrera si el valor actual del precio del automóvil es de \$75,069?
15. ¿De cuánto es la prima que una persona de 28 años debe pagar por un seguro de \$425,000, que cobrará cuando cumpla los 61 años de edad, si los cumple, sabiendo que el 82.21% de los que tienen su edad alcanzan los 61 años? Suponga interés técnico del 6.5% anual.
16. ¿Cuál es el monto del seguro si el valor actual es de \$78,713.46 en el ejercicio 15?
17. El testamento del señor Zamora estipula que el 30% de su herencia, estimada en 2.3 millones de pesos, sea para su hija menor, al cumplir los 25 años si está viva. ¿Cuál es el valor actual ahora que la niña tiene 12 años de edad? Supóngase que, de 10 mil personas de esa edad, 9,802 llegan a los 25 años y una tasa de interés técnico del 7.6% anual.
18. ¿De cuánto será la herencia del señor Zamora si el valor actual es de \$145,000 en el ejercicio 17?
19. La beneficiaria de un seguro de vida recibirá \$750,000 cuando su cónyuge muera. ¿Cuál es el valor presente 28 años antes si la probabilidad de fallecer al final de ese lapso es del 13.5%? Considere un tipo de interés técnico del 9.53% anual.
20. ¿Qué efectos produce el factor de actualización demográfico-financiero sobre un monto de dinero M ?
21. ¿De qué factores depende el factor de actualización demográfico-financiero?
22. ¿Cuál es el factor de actualización de un monto si el plazo es de 13 años, la tasa de interés del 13% anual y la probabilidad es del 57.3%?
23. ¿Cuál será la probabilidad si el factor de actualización demográfico-financiero es 0.20 para un interés del 5.8% y un plazo de 10 años?
24. El factor de actualización, el plazo y la probabilidad son, respectivamente, 0.1502211, 18 años y 69.7%. ¿Cuál es la tasa de interés técnico anual?
25. Resuelva el ejercicio 24 suponiendo que el factor corresponde a un plazo de 27 años y la probabilidad es del 83.8%.
26. ¿Cuál es la tasa de interés técnico anual si el valor presente de un monto de \$65,000 con probabilidades para hacerlo efectivo del 91.08%, es \$535.44? Considere 48 años de plazo.
27. ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero y de actualización pura en el ejercicio 26?

En los ejercicios 28 a 42, justificando su elección, seleccione la opción correcta.

28. ¿Cuál es el mayor, el factor de actualización puro o el factor de actualización demográfico-financiero?
 a) El primero b) El segundo c) Son iguales d) No se puede saber e) Otra: _____
29. Obtenga el factor de actualización demográfico-financiero si la probabilidad de lograr un monto dado en un plazo de 20 años, con una tasa del 9.05% técnico anual es 57.3%.
 a) 0.1013074 b) 0.1829327 c) 0.0123475 d) 0.2105391 e) Otra: _____
30. ¿De cuánto es el premio que la Universidad Autónoma del Sureste otorga a sus empleados que permanecen 25 años si su valor presente es de \$2,258.94 al inicio de ese lapso, con una tasa de interés técnico del 6.8%? Se sabe que sólo el 39% de los profesores logran permanecer ese tiempo en la universidad.
 a) \$35,000.00 b) \$30,000.00 c) \$32,000.00 d) \$26,000.00 e) Otra: _____
31. ¿Cuál es el valor actual si el premio que otorga la Universidad del ejercicio 30 es de \$45,000 y la tasa es del 7.5%?
 a) \$3,126.48 b) \$3,929.43 c) \$4,005.62 d) \$2,877.83 e) Otra: _____

32. ¿Cuál es el monto que una aseguradora paga a una persona si está viva a los 55 años de edad si la prima que pagó cuando tenía 29 años fue de \$50,485.50? Considere el 7.55% de interés anual y que de 97,682 personas de 29 años, sólo 87,195 cumplen los 55.
- a) \$375,000 b) \$270,000 c) \$410,000 d) \$425,000 e) Otra: _____
33. ¿De cuánto es la prima actual que una persona de 32 años paga por un seguro de \$850,000 a los 65 años de edad si es que aún está con vida? Considere que el 77.44% de los que tienen 32 años alcanzan los 65, y que la tasa de interés técnico es del 9.81% anual.
- a) \$37,629.35 b) \$28,903.75 c) \$30,005.57 d) \$32,549.60 e) Otra: _____
34. El valor actual de un pago contingente de \$275,000 es \$13,880.23. ¿Cuál es la probabilidad de cobrarlo si el plazo es de 23 años y la tasa de interés técnico es del 11.6% anual?
- a) 63% b) 52% c) 49% d) 65% e) Otra: _____
35. ¿De cuánto es el valor actual de un monto de \$140,000 si la tasa de interés es del 8.3% y la probabilidad de lograrlo 15 años después es del 82.45%?
- a) \$39,693.22 b) \$31,695.45 c) \$34,905.34 d) \$38,296.43 e) Otra: _____
36. ¿Cuánto debe pagar una persona de 27 años por un seguro de \$275,000 que cobrará, si vive, cuando cumpla los 52 años de edad? Considere que el tipo de interés técnico es del 6.7% anual y que de 150,000 personas de 27 años, 136,517 alcanzan los 52.
- a) \$65,493.29 b) \$43,298.65 c) \$49,467.24 d) \$53,260.30 e) Otra: _____
37. ¿De qué cantidad es el premio que una distribuidora de electrodomésticos ofrece a los empleados que cumplan los 56 años de edad a su renuncia si el valor actual es de \$33,998.20 para uno que tiene 29 años de edad? Considere un tipo de interés técnico del 7.7% y que de 5,000 individuos de 29 años, el 85.4% logran alcanzar los 56.
- a) \$310,000 b) \$260,000 c) \$230,000 d) \$295,000 e) Otra: _____
38. ¿Cuál es el valor presente de \$1'250,000 pagaderos al cabo de 49 años a una persona que cumple 72 años de edad? Considere que las que tienen 23 años llegan a los 72 con una probabilidad del 61.95% y que la tasa de interés técnico es del 11.25% anual.
- a) \$4,171.10 b) \$4,928.43 c) \$5,079.42 d) \$3,998.33 e) Otra: _____
39. ¿Cuál es el valor del dotal puro si 19 años antes su valor presente es de \$31,451.87, suponiendo que la probabilidad de lograrlo es del 86.29% y el tipo de interés técnico es del 13.8% anual?
- a) \$440,000 b) \$425,000 c) \$385,000 d) \$310,000 e) Otra: _____
40. Calcule la probabilidad si con interés del 5.8% anual el valor actual de un dotal puro de \$275,000 es de \$28,758.20 para un individuo que a los 67 años lo cobrará teniendo ahora 31 años de edad.
- a) 80.40% b) 72.25% c) 79.96% d) 79.60% e) Otra: _____
41. ¿Cuál es el valor actual de un monto de \$75,000 pagadero a una persona 18 años después, si está viva, suponiendo que la probabilidad de lograrlo es de 78.9% y una tasa de interés técnico del 6.75%?
- a) \$23,925.43 b) \$27,968.41 c) \$21,362.42 d) \$18,260.66 e) Otra: _____
42. ¿Cuál es el plazo aproximado si el valor presente de un dotal puro de \$205,000 es de \$7,248.04? Supóngase que la probabilidad de cobrarlo es del 85.43% y los intereses son del 11.2% anual.
- a) 25 años b) 28 años c) 37 años d) 30 años e) Otra: _____

→ 10.4 Tablas de mortalidad

Las tablas de mortalidad, muy utilizadas en el área de seguros, registran valores que pueden variar de acuerdo con el volumen y las características de los individuos que se tomaron en cuenta para hacerla y son los organismos de control de cada país los que autorizan o no a las aseguradoras, para su aplicación en el cálculo de primas, por ejemplo.

En los ejemplos de las secciones que preceden, el valor de la probabilidad p , para la esperanza matemática, ha sido un valor, es decir, un dato ciertamente ficticio, pero es evidente que hay formas para considerar este número de manera más científica, con mayor precisión y más cercana a la realidad. Tales fórmulas se enuncian con los registros numéricos que tienen las compañías aseguradoras con respecto al número de pólizas, es decir, con respecto al número de personas que, teniendo una edad x , sobreviven n años, o sea, alcanzan los $x + n$ años de edad y han sido contabilizadas por un tiempo más o menos largo. Se resumen en lo que se conoce como *tabla de mortalidad*, pero antes de definirla es conveniente señalar que sus valores no dejan de ser teóricos, porque se obtuvieron con información que de alguna manera es obsoleta, ya que, por ejemplo, la edad promedio del ser humano se ha incrementado y sigue haciéndolo por diferentes circunstancias, entre las que se puede mencionar, sólo por referirnos a una, el notable avance de la ciencia médica, porque la cantidad de gente que sobrevive a casi cualquier enfermedad es mucho mayor que antes.

Definición 10.5

Tabla de mortalidad. Es el registro estadístico de sobrevivientes de un grupo de personas de x años de edad, es decir, es una serie cronológica que expresa la forma en que se reduce, por fallecimiento, el número de individuos que tienen la misma edad.

¿Cuáles son los valores que contiene una tabla de mortalidad?

En el apéndice disponible en el sitio web está la tabla de mortalidad de la experiencia mexicana con registro del periodo comprendido desde 1982 hasta 1989. En ella se han incluido los valores de conmutación D_x y N_x para tasas de interés, llamadas de interés técnico, del 4%, 6.5% y 8%, siendo evidente que puede ampliarse para que incluyan otras tasas, pues todas las columnas, desde la tercera, dependen de los valores de las primeras dos.

En la primera columna está la edad x , que comienza con los 12 años, aunque pudiera iniciar con 15 o 20 años o cualquier otro valor, incluyendo la edad cero, pero en todos los casos terminan en los 99.

La columna segunda contiene el valor l_x , que representa el número de personas que se mantienen o mantuvieron con vida hasta los x años de edad, de las que había en una muestra original de 10 millones, cantidad que también llega a variar pudiendo ser de 100 mil, un millón o cualquier otro valor relativamente grande. Sólo como referencia, y tal vez para recordarlo más fácilmente, se utiliza el símbolo l_x , por la inicial de *life*, *living* o *live*, del idioma inglés.

La tercera columna contiene al número de individuos, de los 10 millones originales, que fallecieron a la edad x , es decir, el número de personas de x años cumplidos y no llegan a cumplir los $x + 1$ años. Se denota con d_x , por la inicial de *death* o *dead*, es igual a la diferencia entre dos valores consecutivos de l_x y está dado por $d_x = l_x - l_{x+1}$,* esto es, el número de personas que alcanzaron la edad x menos las que alcanzaron los $x + 1$ años de edad.

* Note que l_{x+1} siempre será menor que l_x , aunque por la notación parezca lo contrario.

Ejemplo 1

En la última tabla del apéndice, se ve que de 10 millones de personas de 12 años, 9'711,424 alcanzan los 32 años de edad y 9'690,642 llegaron con vida a los 33 años; entonces:

$$d_{32} = 9'711,424 - 9'690,642 \quad \text{o bien,} \quad d_{32} = 20,782$$

es el número de los que fallecieron cuando tenían 32 años cumplidos, según los registros de dicha tabla de mortalidad. En la tercera columna y el renglón para $x = 32$, se encuentra este valor.

En la cuarta columna está el valor de p_x , la probabilidad que tiene una persona de x años de edad de alcanzar un año más de vida, es decir, de llegar a la edad $x + 1$. Tal probabilidad está dada por el cociente del número de personas vivas de edad $x + 1$, entre las que alcanzaron los x años de vida, o sea:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Ejemplo 2

Con los valores del ejemplo 1, se concluye que la probabilidad de llegar a los 33 años, teniendo 32, es:

$$p_{32} = \frac{9'690,642}{9'711,424}$$

$$p_{32} = 0.997860046 \quad \text{o bien,} \quad 99.786\%, \text{ aproximadamente}$$

tal como se observa en la cuarta columna.

La probabilidad de que un individuo de x años de edad no cumpla los $x + 1$ se denota con q_x , que son los valores que están en la quinta columna de la tabla de mortalidad. Como esta probabilidad es complementaria a la de sí cumplir los $x + 1$ años, origina la diferencia entre p_x y el 100%, es decir:

$$q_x = 1 - p_x$$

Así, la probabilidad que tiene una persona de 32 años de edad de no alcanzar los 33 es:

$$q_{32} = 1 - 0.99786 \quad p_x = 0.99786$$

$$q_{32} = 0.00214 \quad \text{o bien,} \quad 0.214\%$$

como también puede verse en la tabla.

Antes de continuar con las columnas de letras mayúsculas, D_x y N_x , que se denominan *valores* o *símbolos de conmutación*, veamos algunas aplicaciones relacionadas con lo que se ha explicado de la tabla de mortalidad, basándonos en la teoría de probabilidades que se estudió en la primera sección de este capítulo.

Probabilidad de que una persona de x años, viva n años más

Las probabilidades de que se alcancen $x + n$ años, teniendo x años de edad, se denota con ${}_n p_x$ y está dada por la multiplicación de las probabilidades $p_x, p_{x+1}, \dots, p_{x+n-1}$, que representan, respectivamente, la probabilidad de alcanzar un año más de vida, teniendo x años, $x + 1$, $x + 2$, y así sucesivamente hasta $x + n$. Entonces:

$${}_n p_x = \left(\frac{l_{x+1}}{l_x} \right) \left(\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \right) \left(\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \right) \cdots \left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} \right), \text{ ya que } p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \text{ etcétera.}$$

Para simplificar, nótese que todos los numeradores, desde el primero hasta el penúltimo, se cancelan con los denominadores, desde el segundo, quedando:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Ejemplo 3

¿Qué probabilidades hay de alcanzar los 65 años de edad, teniendo 32?

Solución

Vimos que $l_{32} = 9'711,424$, mientras que en la tabla de mortalidad se aprecia que:

$$l_{65} = 7'520,523$$

Entonces:

$$\begin{aligned} {}_{33}p_{32} &= \frac{7'520,523}{9'711,424} & {}_{33}p_{32} &= \frac{l_{65}}{l_{32}} \text{ Note que } x + n = 32 + 33 = 65 \\ &= 0.774399614 & \text{ o bien, } & 77.44\% \end{aligned}$$

Probabilidad de que teniendo x años no se cumplan los $x + n$

Esta probabilidad, que se denota con ${}_n q_x$, es complementaria a ${}_n p_x$; en consecuencia, está dada por

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

$${}_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\text{o bien,} \quad {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad \text{se efectúa la resta.}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es la probabilidad de que un individuo de 65 años no cumpla los 85 años de edad?

Solución

En este caso, $x = 65$, $x + n = 85$ y $n = 20$. En la segunda columna de la tabla de mortalidad se ve que:

$$\begin{aligned} l_{85} &= 2'386,780 \text{ y como } l_{65} = 7'520,523, \text{ se tiene que} \\ {}_{20}q_{65} &= \frac{(7'520,523 - 2'386,780)}{7'520,523} \\ &= \frac{5'133,743}{7'520,523} \\ &= 0.682631115 \quad \text{o bien, redondeando} \quad 68.263\% \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado con la ecuación ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$.

Probabilidad de que una persona de x años fallezca entre los $x + m$ y los $x + m + n$ años de edad

Ésta es la probabilidad de fallecer en un periodo de n años, contados desde los $x + m$ años de edad, teniendo edad x , y deben cumplirse dos eventos que son independientes y tienen que ocurrir en un orden dado. El primero es que se deben cumplir $x + m$ años, teniendo una edad x , y el segundo es que habiendo llegado a los $x + m$ años se fallezca antes de cumplir los $x + m + n$ años. La probabilidad del primero es:

$${}_mP_x = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

y la del segundo es:

$${}_nq_{x+m} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \quad \text{¿Por qué?}$$

Entonces, la probabilidad que se busca es $\frac{m}{n}q_x$, así se expresa, y está dada por el producto de las dos probabilidades:

$$\frac{m}{n}q_x = \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right) \left(\frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \right)$$

o bien,

$$\frac{m}{n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \quad \text{dado que se cancela } l_{x+m}$$

Ejemplo 5

¿Qué probabilidad tiene de fallecer entre los 65 y los 85 años de edad una persona que ahora tiene 32?

Solución

De los dos últimos ejemplos y la tabla de mortalidad, se tiene que $l_{32} = 9'711,424$, $l_{65} = 7'520,523$ y $l_{85} = 2'386,780$, además de que $x = 32$, $m = 33$, porque $m = 65 - 32$ y $n = 20$, ya que $n = 85 - 65$.

Entonces, la probabilidad que se pide, se denota y está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{33}{20}q_{32} &= \frac{l_{65} - l_{85}}{l_{32}} \quad \frac{m}{n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \\ &= \frac{(7'520,523 - 2'386,780)}{9'711,424} \\ &= \frac{5'133,743}{9'711,424} \\ &= 0.528629272 \quad \text{o bien, } 52.863\% \end{aligned}$$

Note que si $n = 1$, la ecuación anterior quedará como:

$$\frac{m}{1}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} \quad \text{o bien, } \frac{m}{1}q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

considerando que $x + m$ hace las veces de x , en la fórmula $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Ejemplo 6

¿Cuál es la probabilidad de que Alberto, de 25 años de edad, fallezca cuando tenga entre 60 y 61 años?

Solución

En este ejemplo: $x = 25$, $x + m = 60$ y $m = 35$; además, en la tabla de mortalidad se ve que $l_{25} = 9'833,689$ y $d_{60} = 122,599$, entonces, la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}\frac{{}_{35}q_{25}}{1} &= \frac{122,599}{9'833,689} & \frac{{}_{35}q_{25}}{1} &= \frac{d_{60}}{l_{25}} \\ &= 0.012467244 \quad \text{o bien,} \quad 1.2467\%, \text{ aproximadamente.}\end{aligned}$$

Note que esto es diferente a q_{60} , que es la posibilidad de fallecer a los 60 años antes de cumplir los 61, pero teniendo 60 años de edad.

Símbolos o valores de conmutación

En las columnas de la 6 a la 11 de la tabla de mortalidad están los valores de conmutación D_x y N_x , que no obedecen a concepto alguno, sino que son símbolos o relaciones matemáticas que, combinados con factores financieros a determinada tasa o tipo de interés técnico del 4, 6.5 y 8% en esta tabla, facilitan los cálculos y el uso de fórmulas actuariales, particularmente para las anualidades contingentes.

Se ha visto que el capital o valor presente C de un monto M , n años antes con una tasa de interés compuesto anual, está dado por:

$$C = M(1 + i)^{-n} \quad \text{ya que} \quad M = C(1 + i)^n$$

donde el factor $(1 + i)^{-n}$, que algunos llaman *factor de actualización pura*, provoca que el capital sea menor que el monto, dependiendo del plazo n y de la tasa de interés i . Si además esto se multiplica por la probabilidad, ${}_np_x$, de que una persona cumpla $x + n$ años, teniendo x años de edad, entonces el monto se reduce aún más, ya que la probabilidad, se dijo, es menor que la unidad. Quedará en tal caso un capital dado por:

$$C = M({}_np_x)(1 + i)^{-n}$$

donde al coeficiente de M , denotado por ${}_nE_x$, le llaman, se dijo, *factor de actualización demográfico-financiero*, que en general estará dado por:

$$\begin{aligned}{}_nE_x &= ({}_np_x)(1 + i)^{-n} \\ {}_nE_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x}(1 + i)^{-n} \quad \text{porque} \quad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\end{aligned}$$

Si el lado derecho se multiplica por y divide entre $(1 + i)^{-x}$, no se altera y queda:

$$\begin{aligned}{}_nE_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x}(1 + i)^{-n} \frac{(1 + i)^{-x}}{(1 + i)^{-x}} \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{(1 + i)^{-n-x}}{(1 + i)^{-x}} \quad a^m a^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

$$\text{o bien,} \quad {}_nE_x = \frac{(l_{x+n})(1 + i)^{-(x+n)}}{(l_x)(1 + i)^{-x}} \quad \text{ya que } -a - b = -(a + b) \quad (\text{A})$$

Precisamente, el denominador de esta función es lo que se denota como D_x , es decir:

$$D_x = (l_x)(1+i)^{-x}$$

que podría “definirse” como el número de sobrevivientes a una tasa de interés técnico anual i por un tiempo equivalente a su edad.

Ejemplo 7

Comprobar que el valor de D_{35} es 1'064,406.39, tal como aparece en la columna 8 de la tabla de mortalidad para el tipo de interés del 6.5% anual.

Solución

$$\begin{aligned} D_{35} &= 9'645,922(1 + 0.065)^{-35}, \text{ ya que } l_{35} = 9'645,922 \\ &= 9'645,922(0.110347812) \text{ o } D_{35} = 1'064,406.391 \end{aligned}$$

Notando que el numerador de la ecuación (A) es equivalente al denominador, pero con $x + n$ en lugar de x , el factor de actualización ${}_nE_x$ puede expresarse más brevemente como:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ejemplo 8

¿Cuánto debe depositar, al 6.5% anual, una persona de 35 años de edad para disponer de \$350,000 cuando cumpla 58, si vive, claro?

Solución

En la multicitada tabla se ve que $D_{58} = 218,778.16$ y $D_{35} = 1'064,406.39$, para $i = 0.065$, por eso, el factor de actualización es:

$$\begin{aligned} {}_{23}E_{35} &= \frac{218,778.16}{1'064,406.39} \quad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ {}_{23}E_{35} &= 0.205540066 \end{aligned}$$

Entonces, lo que se debe depositar, es decir, el valor actual de los \$350,000, es:

$$\begin{aligned} C &= 0.205540066(350,000) \quad C = ({}_nE_x)M \\ C &= 71,939.02314 \quad \text{o bien,} \quad \$71,939.02 \end{aligned}$$

Nota

El valor futuro M se conoce como *dotal puro*, entonces, $C = 71,939.02$ es el valor presente del dotal puro 350,000 en las condiciones dadas.

Solución alterna

Puesto que $l_{58} = 8'438,810$, $l_{35} = 9'645,922$ y $n = 23$, se tiene que el factor de actualización es:

$$\begin{aligned} {}_{23}E_{35} &= \left(\frac{8'438,810}{9'645,922} \right) (1.065)^{-23} \quad {}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} (1+i)^{-n} \\ &= 0.87485779(0.234941113) \\ &= 0.205540063, \text{ que es prácticamente igual al anterior.} \end{aligned}$$

Ejemplo 9

¿Cuál es el valor actual del dotal puro \$1'750,000 al cumplir los 53 años una persona que ahora tiene 24? Considere un tipo de interés técnico del 4% anual.

Solución

En la tabla de mortalidad se observa que el valor de conmutación para $x = 53$ es $D_{53} = 315,298.70$ y para $x = 24$ es $D_{24} = 2'172,633.71$, considerando, claro, que $i = 0.04$. El factor de actualización demográfico-financiero es entonces:

$${}_{29}E_{24} = \frac{315,298.70}{2'172,633.71} \quad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{53}}{D_{24}}$$

o bien, ${}_{29}E_{24} = 0.145122806$

y el valor presente de los \$1'750,000, 29 años antes, es:

$$C = 0.145122806(1'750,000) \quad C = ({}_{29}E_{24})M$$

$$C = 253,964.9102 \quad \text{o bien,} \quad \$253,964.91$$

Ejercicios 10.4

1. ¿Qué datos contiene una tabla de mortalidad?
2. ¿Qué valores contiene la columna para d_x en una tabla de mortalidad?
3. La columna encabezada con l_x , ¿qué valores contiene?
4. ¿Qué son los valores o símbolos de conmutación?
5. ¿Cuál es el tipo de interés técnico?
6. ¿Cuál valor es mayor, l_{50} o d_{50} ? ¿Por qué?
7. ¿Qué representa q_x en una tabla de mortalidad?
8. ¿Qué significa que l_{72} sea igual a 6'109,074 en la tabla de mortalidad?
9. ¿Cómo se obtiene p_{48} ?
10. ¿Cómo se definiría el símbolo de conmutación D_{30} ? ¿El símbolo N_{80} ?
11. Compruebe que para los valores de la tabla de mortalidad del apéndice, el valor de d_{52} es 70,774, como también se aprecia en la misma.
12. Compruebe que q_{45} es igual a 0.00472, como aparece en la tabla de mortalidad.
13. Verifique que el valor de D_{55} es 1'008,458.16, como se ve en la tabla, para una tasa de interés del 4% anual.
14. Compruebe que para una tasa del 6.5% de interés el valor de D_{95} es el que está en la tabla de mortalidad, 890.40.
15. Obtenga el valor de conmutación D_{73} para la tasa de interés técnico del 8% y cotéjelo con el de la tabla.
16. Calcule el valor de conmutación D_{88} para un interés del 4% y cotéjelo con el de la tabla de mortalidad del apéndice.
17. Evalúe la probabilidad de llegar a los 45 años de edad, teniendo 44, y compárelo con el de la tabla.

18. En la tabla de mortalidad se aprecia que $q_{50} = 0.0068$. Compruébelo.
19. En la misma tabla se aprecia que $D_{30} = 3'006,135.69$ para $i = 0.04$. Compruébelo.
20. ¿Cómo simboliza la probabilidad de que una persona de 27 años cumpla los 68?
21. ¿Qué significa la expresión ${}_{38}p_{20}$?
22. ¿Cómo evalúa ${}_{15}p_{30}$? ¿A qué es igual?
23. ¿Cómo calcula la probabilidad de que una persona de 50 años no celebre los 65 años de edad?
24. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 90 años viva para celebrar los 91?
25. ¿Qué probabilidad tiene un individuo de no cumplir los 56 años de edad, teniendo 55?
26. ¿Qué probabilidad tiene Carlos Enrique de celebrar los 52 años de edad si tiene 35?
27. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos Enrique, el del ejercicio 26, no cumpla los 60 años de edad?
28. ¿Qué probabilidad tenía el personaje del ejercicio 26 de llegar a la edad actual cuando su edad era de 12 años?
29. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Luis de no cumplir los 73 años si ahora tiene 40?
30. ¿Qué probabilidad se tiene de no cumplir los 65 años de vida, teniendo 42?
31. ¿Cuál es la probabilidad de morir entre los 50 y 62 años de edad de una persona que ahora tiene 20 años?
32. La probabilidad de fallecer entre los 45 y los 63 años de edad de un individuo es de 15.29849%. ¿Cuál es la edad actual?
33. ¿Cuál es la probabilidad de fallecer entre los 48 y los 65 años de edad de una persona que ahora tiene 12?
34. Jorge tiene 29 años de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que fallezca entre los 70 y 78 años de edad?

Seleccione la opción correcta en los ejercicios 35 a 65, y utilice la tabla de mortalidad del apéndice.

35. Obtenga el valor de conmutación D_{63} para $i = 0.065$ y compruébelo en la tabla.
 a) 661,172.21 b) 236,926.16 c) 148,043.61 d) 610,336.41 e) Otra: _____
36. Encuentre el valor de q_{29} y compruébelo con la tabla del apéndice.
 a) 0.185% b) 0.273% c) 0.410% d) 0.927% e) Otra: _____
37. Calcule el valor de conmutación D_{90} para el 8% de interés técnico y verifíquelo en la tabla.
 a) \$4,170.73 b) \$2,810.98 c) \$1,104.57 d) \$9,580.73 e) Otra: _____
38. Encuentre el valor de conmutación N_{87} para $i = 0.04$ y compruébelo con la tabla de mortalidad.
 a) \$189,055.19 b) \$53,993.22 c) \$281,751.42 d) \$203,409.21 e) Otra: _____
39. Calcule p_{36} y compruébelo en la tabla.
 a) 99.632% b) 99.735% c) 99.561% d) 99.087% e) Otra: _____

40. ¿Cómo simboliza la probabilidad que tiene de llegar a los 61 años de edad una persona que cuenta ahora con 31?
- a) ${}_{31}P_{61}$ b) ${}_{31}P_{30}$ c) ${}_{30}P_{31}$ d) ${}_{61}P_{31}$ e) Otra: _____
41. ¿Cómo representa la probabilidad de que teniendo x años de edad no se cumplan 40 años más?
- a) ${}_{40}q_x$ b) ${}_{40}p_x$ c) ${}_xq_{40}$ d) ${}_{x+40}q_x$ e) Otra: _____
42. ¿Cuál es la probabilidad de cumplir 61 años de edad si se tienen 25?
- a) 82.3137% b) 80.0932% c) 90.1298% d) 81.4293% e) Otra: _____
43. ¿Qué probabilidad tiene Claudia de cumplir un año más de vida si tiene 37 años?
- a) 98.654% b) 99.029% c) 98.736% d) 99.719% e) Otra: _____
44. ¿Cuál es la probabilidad de que se cumplan 90 años de edad teniendo 12?
- a) 10.0591% b) 11.9351% c) 7.0635% d) 11.2546% e) Otra: _____
45. ¿Qué probabilidad existe de que Raúl, teniendo 21 años de edad, no cumpla los 48?
- a) 7.1189% b) 7.6385% c) 9.3891% d) 9.9342% e) Otra: _____
46. Calcule la probabilidad de celebrar el aniversario número 58, teniendo 15 años de edad.
- a) 87.9312% b) 84.6774% c) 81.9035% d) 90.0453% e) Otra: _____
47. ¿Cuál es la probabilidad de no cumplir los 55 años de edad teniendo 18?
- a) 12.187% b) 14.029% c) 15.253% d) 12.906% e) Otra: _____
48. ¿Cuál es la probabilidad de que no cumpla los 60 años un individuo de 41 años de edad?
- a) 11.9385% b) 14.0927% c) 15.0583% d) 13.3077% e) Otra: _____
49. ¿Cuántos años tiene Sandra si la probabilidad de que fallezca sin cumplir un años más de vida es del 1%?
- a) 51 años b) 62 años c) 55 años d) 46 años e) Otra: _____
50. ¿Cuál es la edad de Enrique si la probabilidad de que muera en los próximos 25 años es de 33.8634156%?
- a) 50 años b) 45 años c) 47 años d) 49 años e) Otra: _____
51. ¿Cómo representa la probabilidad de que una persona de 19 años fallezca entre los 65 y los 78 años de edad?
- a) $\frac{13}{46}q_{19}$ b) $\frac{46}{13}q_{19}$ c) $\frac{78}{65}q_{19}$ d) ${}_{78}q_{19}$ e) Otra: _____
52. ¿Qué probabilidades tiene Hortensia, de 48 años de edad, de celebrar su aniversario número 49?
- a) 99.455% b) 99.369% c) 99.414% d) 99.628% e) Otra: _____
53. ¿Cuál es la probabilidad de que Hortensia, la del ejercicio 52, no fallezca entre los 65 y los 85 años de edad?
- a) 25.2512% b) 23.4236% c) 21.6362% d) 22.4908% e) Otra: _____

54. ¿Cómo se denota el factor de actualización demográfico-financiero?
- a) ${}_nE_x$ b) D_x c) ${}_nq_x$ d) $({}_nE_x)M$ e) Otra: _____
55. El factor de actualización demográfico-financiero se calcula mediante:
- a) $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ b) $\frac{N_{x+1}}{N_x}$ c) $l_x(1+i)^{-n}$ d) $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ e) Otra: _____
56. ¿Cuál es el factor de actualización demográfica pura?
- a) ${}_nE_x$ b) $\frac{N_x}{D_x}$ c) $(1+i)^{-n}$ d) $l_x(1+i)^{-n}$ e) Otra: _____
57. Numéricamente, ¿cuál es mayor, el factor de actualización financiera pura o el de actualización demográfico-financiero?
- a) El segundo b) El primero c) Son iguales d) No se sabe e) Otra: _____
58. Obtenga el factor de actualización demográfico-financiero si una persona de 25 años de edad dispondrá de un dotal puro cuando cumpla los 56, si los cumple, considerando 6.9% de interés técnico anual.
- a) 0.125312835 b) 0.110943162 c) 0.145138217 d) 0.183214592 e) Otra: _____
59. ¿Cuál es el factor de actualización financiera pura en el ejercicio 58?
- a) 0.13297128 b) 0.12638371 c) 0.11681938 d) 0.1108963% e) Otra: _____
60. ¿Cuánto deberá pagar ahora una persona de 27 años de edad para disponer de \$325,000 cuando cumpla los 48 años, si los cumple? Considere el 8% de interés técnico anual.
- a) \$85,429.32 b) \$60,509.49 c) \$70,929.33 d) \$68,923.37 e) Otra: _____
61. ¿De cuánto es el dotal puro si la prima actual es de \$304,647.90? Considere que se cobrará cuando una persona tenga 49 años de edad, teniendo ahora 22, y la tasa de interés técnico es del 4% anual.
- a) \$875,000 b) \$950,000 c) \$1'325,000 d) \$760,000 e) Otra: _____
62. ¿Cuánto debe depositar ahora, con intereses del 6.5% anual, el arquitecto Sánchez, de 30 años de edad, para disponer de \$750,000 cuando cumpla los 53, si los cumple?
- a) \$116,294.06 b) \$243,298.31 c) \$178,923.45 d) \$160,421.63 e) Otra: _____
63. ¿Cuál es el valor presente del dotal puro, \$925,000, al cumplir los 60 años de edad un individuo que ahora tiene 23, considerando intereses del 8% anual?
- a) \$44,685.24 b) \$123,923.32 c) \$75,921.08 d) \$215,721.19 e) Otra: _____
64. El valor actual de 1.5 millones de pesos es de \$513,613.91, con intereses del 4%, para una persona que lo hará efectivo cuando cumpla los 52. ¿Cuántos años tiene?
- a) 37 años b) 29 años c) 23 años d) 27 años e) Otra: _____
65. ¿A qué edad cobrará \$660,000, si vive, una persona que ahora tiene 31 años de edad, deposita \$59,943.19 y le bonifican un tipo de interés técnico del 6.5% anual?
- a) 53 años b) 60 años c) 68 años d) 65 años e) Otra: _____

→ 10.5 Rentas vitalicias

En el capítulo 5 se vio que *anualidad* es una serie de pagos o rentas iguales a intervalos de tiempo iguales, con interés compuesto. También se dijo que la anualidad puede ser anticipada cuando los pagos o las rentas se realizan al inicio de cada periodo o vencidas cuando las rentas están al final de cada periodo. Se insistió, además, en que la anualidad es cierta si se conocen las fechas de inicio y terminación del plazo, y es contingente, si se desconoce por lo menos una de las dos fechas; éstas son las que abordaremos ahora.

El planteamiento consiste en encontrar el valor presente de cada dotal puro, o sea, de cada renta en la fecha inicial del plazo, es decir, cuando se tiene la edad x , utilizando el factor de actualización demográfico-financiero con diferentes plazos, esto hasta que el interesado se mantenga con vida, por eso se les llama *rentas vitalicias*.

Al no conocer el año del fallecimiento, para los cálculos se considera, en teoría, que se estará con vida hasta la edad extrema que aparece en la tabla de mortalidad, es decir, hasta los 99 años.

Si se supone que cada renta es de un peso, $R = 1$, el valor presente de la primera será simplemente:

$$C_1 = {}_1E_x$$

porque el plazo es de un año y la anualidad es vencida u ordinaria.

Como se aprecia en la figura 10.1, el plazo para el segundo dotal es de 2 años y su valor actual será:

$$C_2 = {}_2E_x$$

Para el tercero será de 3 años, por eso $C_3 = {}_3E_x$; continuando de esta manera, se llegará hasta el último, que se adelanta $99 - x$ periodos anuales, por eso será:

$$C_n = {}_nE_x \quad \text{o bien,} \quad C_n = {}_{99-x}E_x$$

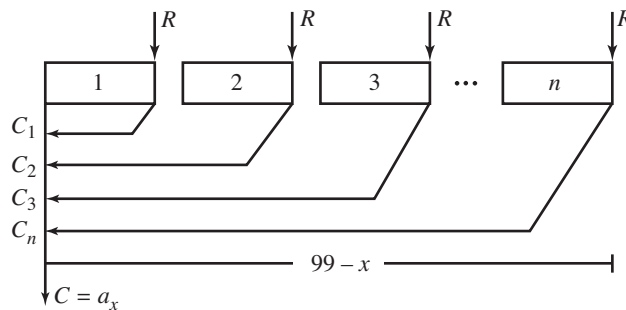


Figura 10.1

Note que la última renta se adelanta $99 - x$ años.

La suma de todos es igual al valor presente de la anualidad, que se ha expresado como $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$, aclarando que en notación actuarial se expresa como a_x . Por lo tanto:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots + {}_{99-x}E_x \quad \text{porque } C_1 = {}_1E_x \quad \text{etcétera}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + \frac{D_{99}}{D_x}, \quad \text{ya que } {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ecuación (B)
$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots + D_{99}}{D_x}, \quad D_x \text{ es el común denominador}$$

Note que:

$${}_{99-x}E_x = \frac{D_{x-(99-x)}}{D_x} \quad \text{o} \quad {}_{99-x}E_x = \frac{D_{99}}{D_x}$$

ya que se elimina x y además:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \text{y} \quad n = 99 - x$$

Si el último valor de la tabla de mortalidad fuera w , $x = w$, entonces, el último sumando sería:

$${}_{w-x}E_x = \frac{D_{x+(w-x)}}{D_x} = \frac{D_w}{D_x}$$

El numerador de la ecuación **(B)** es el otro símbolo de conmutación, que en este caso se denota como N_{x+1} , porque el primer sumando es D_{x+1} , pero cuando esa suma comience con D_x se expresará como N_x , valor que aparece en la séptima columna de la tabla para un tipo de interés técnico del 4%. Consecuentemente, el valor actual de la anualidad con rentas vitalicias de un peso será, en este caso:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

y si la renta no fuera de un peso, este valor se multiplica simplemente por el valor de la renta, R .

Es oportuno decir que cuando la primera renta se realiza a la edad x , el primer término en el numerador de la ecuación **(B)** es D_x y el valor presente se denota como \ddot{a}_x , esto corresponde a una anualidad anticipada.

Ejemplo 1

Compruebe que el valor de \$2,052.11 para N_{92} , para una tasa del 8% de interés técnico anual, es el que está en la columna 11 de la tabla de mortalidad del apéndice.

Solución

Como se dijo, en la ecuación **(B)** del desarrollo anterior, la suma de todos los valores de conmutación desde D_x hasta D_{99} es igual al segundo símbolo de conmutación N_x , es decir, que en este ejemplo:

$$N_{92} = D_{92} + D_{93} + \dots + D_{99}$$

y los ocho valores de D se obtienen de la tabla de mortalidad, los que están en la décima columna para $i = 0.08$. Entonces, el valor de conmutación que se pide es:

$$N_{92} = 631.92 + 464.82 + 334.85 + 235.80 + 161.95 + 108.29 + 70.29 + 44.18$$

o bien,

$$N_{92} = 2,052.11$$

tal como se comprueba en la siguiente columna de la misma tabla.

Note que para comprobar que, por ejemplo, N_{16} es igual a 37'911,407.08, como aparece en la tabla, deberían sumarse 84 valores de conmutación, desde D_{16} hasta D_{99} , lo cual es sumamente tedioso y, como en todos los valores de la tabla, sería necesario el uso de algún programa de computadora, Excel, por ejemplo.

Ejemplo 2

¿Qué cantidad única pagaría hoy una persona de 30 años de edad en lugar de \$30,000 al final de cada año mientras viva? Considere un 4% de interés técnico anual.

Solución

En la tabla de mortalidad se observa que los valores de conmutación que se necesitan para $i = 0.04$ y $x = 30$ son:

$$D_{30} = 3'006,135.69 \quad \text{y} \quad N_{31} = 59'145,002.34$$

entonces, el capital único que sustituye a la renta de un peso al final de cada año es:

$$a_{30} = \frac{59'145,002.34}{3'006,135.69} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{30} = 19.67476137$$

y para los \$30,000 anuales es:

$$19.67476137(30,000) = \$590,242.84$$

Ejemplo 3

¿De cuánto podrá disponer al final de cada año, mientras viva, el arquitecto Guzmán si ahora hace un depósito único de 350 mil pesos en un fondo que bonifica un tipo de interés técnico del 6.5% anual? Considere que él tiene 33 años de edad.

Solución

En la tabla se ve que los valores de conmutación para $x = 33$ e $i = 0.065$ son:

$$N_{34} = 16'484,691.39 \quad \text{y} \quad D_{33} = 1'212,873.46$$

entonces, el capital para un peso de renta es:

$$a_{33} = \frac{16'484,691.39}{1'212,873.46} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{33} = 13.59143549$$

y para disponer de R pesos anuales es de 350,000, por eso:

$$350,000 = 13.59143549 \quad (R)$$

de donde:

$$R = \frac{350,000}{13.59143549}$$

$$R = 25,751.51096 \quad \text{o bien, redondeando} \quad \$25,751.51$$

Ejemplo 4

¿A qué edad recuperará su inversión el arquitecto del ejemplo 3?

Solución

Aplicando actualización financiera pura se obtiene n , el número de años en los que se recupera el capital nominal, lo cual se logra reemplazando los valores que se tienen en la fórmula para el capital de una anualidad vencida.

$$350,000 = 25,751.51 \left(\frac{1 - (1.065)^{-n}}{0.065} \right) \quad C = R \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{-np}}{\frac{i}{p}}$$

de donde:

$$\frac{350,000(0.065)}{25,751.51} - 1 = -(1.065)^{-n}$$

$$(1.065)^{-n} = 0.11655666$$

Como siempre que la incógnita está en el exponente, se utilizan logaritmos para despejarla:

$$\ln(1.065^{-n}) = \ln(0.11655666)$$

$$(-n)\ln(1.065) = \ln(0.11655666) \quad \text{ya que } \log_a(M^n) = (n)\log_a(M)$$

$$-n = \frac{\ln(0.11655666)}{\ln(1.065)}$$

$$-n = -34.13076024 \quad \text{o bien, } n = 34, \text{ redondeando.}$$

Significa que el arquitecto recuperará su inversión luego de estar recibiendo los \$25,751.51 anuales durante 34 años, es decir, cuando celebre su 67º aniversario.

Ejemplo 5

Una persona de 35 años solicita un crédito a una institución financiera, ofreciendo amortizarlo con abonos anuales de \$45,000 durante los años en que se mantenga con vida. ¿Cuánto es lo más que le prestarán si se considera un tipo de interés técnico del 8% anual?

Solución

El máximo capital que pueden prestarle es el valor de la anualidad vitalicia vencida con $R = 45,000$, la renta anual, $i = 0.08$, la tasa de interés técnico y un factor de actualización demográfico-financiero $a_{35} = 11.35593543$, que se calcula con los valores de conmutación para $x = 35$:

$$N_{36} = 7'408,584.11 \quad \text{y} \quad D_{35} = 652,397.52$$

de las columnas 10 y 11 de la tabla de mortalidad. Por lo tanto:

$$a_{35} = \frac{7'408,584.11}{652,397.52} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{35} = 11.35593543$$

Entonces, el valor actual de las rentas anuales de \$45,000 es el siguiente, y por eso lo más que le pueden prestar al señor de 35 años es:

$$C = 11.35593543(45,000)$$

$$C = 511,017.0944 \quad \text{o bien,} \quad \$511,017.09$$

Ejemplo 6

¿De cuánto es una prima, es decir, un pago único que una compañía debe otorgar a su empleado el día de su jubilación si su plan de pensiones prevé pagos anuales de \$65,000 mientras viva? Considere que se jubila a los 55 años de edad y la tasa de interés técnico es del 6.5% anual.

Solución

Los valores de conmutación para la tasa del 6.5% anual y $x = 55$, como se ve en la tabla correspondiente, son:

$$D_{55} = 273,062.62 \quad \text{y} \quad N_{56} = 2'916,757.97$$

El factor de actualización, $a_{55} = \frac{N_{56}}{D_{55}}$, es:

$$a_{55} = \frac{2'916,757.97}{273,062.62} \quad \text{o bien,} \quad a_{55} = 10.681645$$

en tanto que el capital o valor actual de las rentas vitalicias es:

$$C = 10.681645(65,000) \quad C = (a_x)R$$

$$C = 694,306.925 \quad \text{o bien,} \quad \$694,306.92$$

Ejemplo 7

¿Cuánto debe depositar una compañía cada bimestre, en un fondo que bonifica intereses del 9.3% anual capitalizable por bimestre durante 9 años, para disponer del capital necesario y pensionar a uno de sus empleados con \$50,000 anuales mientras viva? Suponga que se jubila a los 48 años de edad, el interés técnico es del 8% anual y el primer depósito bimestral se realiza 13 años antes de su retiro.

Solución

El factor de actualización demográfico-financiero, puesto que $D_{48} = 228,465.16$ y $N_{49} = 2'348,127.47$ para $i = 0.08$ es:

$$a_{48} = \frac{2'348,127.47}{228,465.16} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

o bien, $a_{48} = 10.2778361$

Entonces, el capital necesario para la jubilación del empleado es:

$$C_1 = 10.2778361(50,000) \quad C = a_x R$$

$$C_1 = 513,891.805 \quad \text{o bien,} \quad \$513,891.80$$

Este capital debe ser igual al monto acumulado de las 54 rentas bimestrales de una anualidad diferida; además, como se aprecia en la figura 10.2, debe anticiparse cuatro años para obtener el monto M .

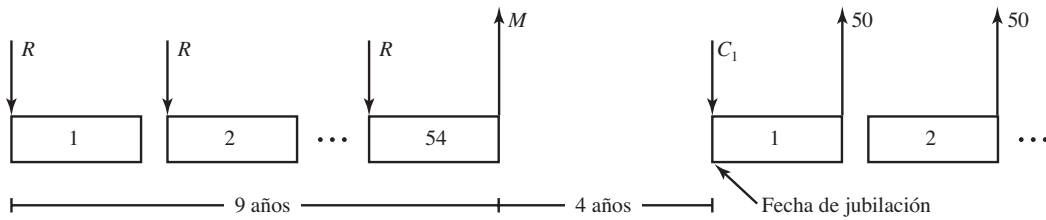


Figura 10.2

El valor presente de C , es decir, el monto M de la anualidad anticipada 24 bimestres antes es:

$$C = 513,891.80 \left(1 + \frac{0.093}{6}\right)^{-24} \quad C = M \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{-np}$$

$$C = 513,891.80(0.691324159)$$

$$C = 355,265.8167$$

Finalmente, para hallar R , el depósito bimestral, en la fórmula para el monto de una anualidad anticipada, teorema 5.1, se reemplazan

M por 355,265.8167, el monto acumulado

i por 0.093, la tasa de interés nominal bimestral

n por 9, los años del plazo

p por 6, la frecuencia de conversión y de pagos por año

R , es la incógnita

$$355,265.8167 = R \left(1 + \frac{0.093}{6}\right) \left[\frac{(1.0155)^{54} - 1}{0.0155} \right] \quad M = R \left(1 + \frac{i}{p}\right) \left[\frac{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{np} - 1}{\frac{i}{p}} \right]$$

$$355,265.8167 = R(1.0155)(83.52568561)$$

de donde:

$$R = \frac{355,265.8167}{84.82033374} \quad \text{o bien,} \quad R = \$4,188.45$$

Rentas vitalicias anticipadas

En la ecuación (B) de la página 567 se estableció que el valor presente de una anualidad vitalicia con rentas vencidas de \$1.00 está dado por:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{99}}{D_x}$$

pero si la primera renta se realiza cuando se tienen x años de edad, entonces, la anualidad es anticipada y el primer término en el numerador será D_x , en lugar de D_{x+1} , y su valor presente, que se denota, se dijo, como \ddot{a}_x , será:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{99}}{D_x} \quad \text{o bien,} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Esta fracción puede descomponerse en:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{99}}{D_x}$$

y, por eso, $\ddot{a}_x = 1 + a_x \quad \frac{a}{a} = 1$

Esto significa que el valor presente de la anualidad anticipada, vitalicia, puede también expresarse y obtenerse con:

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Ejemplo 8

¿Cuánto recibe cada año un empleado desde el día en que se jubiló, a los 42 años de edad, considerando que la compañía destinó \$365,000 con ese propósito y la tasa de interés técnico anual es del 6.5%?

Solución

En la tabla de mortalidad se ve que, para una tasa del 6.5%, los valores de conmutación correspondientes a $x = 42$, son:

$$D_{42} = 670,636.12 \quad \text{y} \quad N_{42} = 9'178,094.97$$

Entonces, el factor de actualización es:

$$\ddot{a}_{42} = \frac{9'178,094.97}{670,636.12} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{42} = 13.6856556$$

Puesto que el valor presente de la anualidad anticipada es $C = (\ddot{a}_x)R$, al sustituir queda la ecuación siguiente, de donde se despeja la incógnita R dividiéndola entre su coeficiente.

$$365,000 = 13.6856556(R)$$

$$R = \frac{365,000}{13.6856556} \quad \text{o bien,} \quad R = \$26,670.26$$

Anualidades vitalicias diferidas

Se dijo que una anualidad es *diferida* si la primera renta se efectúa en un periodo posterior al primero. Si tal renta se realiza digamos k años después de que se tuvo la edad x , entonces, en la mencionada ecuación (B), el primer término de la suma en el numerador será D_{x+k} en lugar de D_{x+1} . ¿Por qué? El último, seguirá siendo D_{99} y el factor de actualización demográfico-financiero para la anualidad vitalicia estará dado por el cociente de los valores de conmutación N_{x+k} y D_x , lo cual se denota como:

$${}_k a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Ejemplo 9

Suponiendo que un empleado tiene derecho a recibir \$485,000 el día de su jubilación, a los 45 años de edad, pero acuerda que le den el 30% ese mismo día y el resto en anualidades durante el tiempo en que esté con vida, recibiendo la primera cinco años después de su retiro laboral, ¿cuánto le darán cada año considerando que la tasa de interés técnico es del 4% anual?

Solución

Los valores a sustituir son $x = 45$, la edad en la que el empleado se retira, $k = 5$, los años que hay entre su retiro y la primera renta, $i = 0.04$, la tasa de interés técnico anual, $N_{50} = 20'597,188.28$ y $D_{45} = 1'596,965.49$, los valores de conmutación, que se leen en las columnas 6 y 7 de la tabla de mortalidad.

El factor de actualización es entonces:

$$\begin{aligned} {}_{51}a_{48} &= \frac{20'597,188.28}{1'596,965.49} & {}_{51}a_{48} &= \frac{N_{50}}{D_{45}} \\ {}_{51}a_{48} &= 12.89770406 \end{aligned}$$

El capital o valor presente de la anualidad al día de la jubilación es el 70% de los \$485,000; esto es:

$$C = 0.70(485,000) \quad \text{o bien,} \quad C = 339,500$$

y la renta vitalicia es R , que se despeja de la ecuación:

$$339,500 = 12.89770406(R)$$

de donde:

$$R = \frac{339,500}{12.89770406} \quad \text{o bien,} \quad R = 26,322.51$$

Ejercicios 10.5

1. ¿Cuáles son las anualidades contingentes?
2. ¿Cómo se expresa el valor actual de las anualidades con rentas vitalicias de \$1.00?
3. ¿Cómo se obtiene el valor actual de rentas vitalicias cuando la primera se realiza al final del primer año, es decir, un año después de la edad x ?
4. ¿Cuál es la característica de las anualidades contingentes anticipadas?
5. ¿Cómo se obtiene el valor actual de las anualidades de la pregunta 4?
6. ¿Qué características tienen las anualidades contingentes diferidas?
7. ¿Cuál es el símbolo para el capital o valor actual de una anualidad contingente anticipada y \$1.00 de renta?
8. En la tabla de mortalidad está el valor 53,993.22 para N_{85} , con una tasa del 6.5% anual. Compruébelo.
9. Considerando un tipo de interés del 4% anual, determine qué cantidad de dinero debe pagar ahora una persona de 33 años de edad, en sustitución de \$45,000 al final de cada año, mientras viva.
10. Si el contador González deposita hoy \$350,000, con una tasa de interés del 6.5% anual, ¿qué cantidad puede retirar al finalizar cada año mientras esté con vida? Suponga que el contador acaba de celebrar su aniversario número 29.

11. ¿A qué edad recuperará su inversión el contador del ejercicio 10?
12. ¿Cuánto debe depositar ahora el contador del ejercicio 10 si fuesen rentas vitalicias anticipadas?
13. ¿Cuánto es lo máximo que prestarían a una persona de 30 años de edad si sus recursos financieros le ajustan para abonar \$50,000 al final de cada año mientras se mantenga con vida? Suponga el 4% de interés técnico anual.
14. Resuelva el ejercicio 13 si se tienen 35 años de edad y pueden abonarse hasta \$45,000 anuales.
15. ¿Cuál es su respuesta en el ejercicio 13 si la tasa fuese del 8% de interés anual?
16. Un profesor solicita un préstamo de \$300,000 para pagarlo con \$37,500 al final de cada año mientras viva, con cargos o intereses del 8% anual. ¿Le prestarán ese capital si tiene 26 años de edad?
17. Resuelva el ejercicio 16 considerando que la edad del docente es de 37 años.
18. En el ejercicio 16, bajo este criterio, ¿cuánto es lo más que pueden prestarle al profesor?
19. ¿De qué cantidad es la prima, es decir, el pago único que una empresa transportadora debe dar a su empleado si se retira a los 52 años de edad y su plan de pensiones prevé pagos de \$60,000 al final de cada año mientras viva? La tasa de interés técnico es del 6.5% anual.
20. Si en el ejercicio 19 el empleado se jubila a los 50 años de edad, ¿cuál es su respuesta?
21. Resuelva el ejercicio 19 considerando el 8% de interés técnico anual.
22. ¿Cuánto deposita cada mes una empresa en una cuenta que bonifica intereses del 8.7% anual capitalizable por meses, para que cuando uno de sus empleados se jubile a los 60 años de edad, obtenga \$150,000 y después disponga de \$48,000 al final de cada año mientras se mantenga con vida? Considere que la primera renta mensual anticipada se realiza cuando el empleado tiene 35 años de edad y suponga que la tasa de interés técnico es del 6.5% anual.
23. Resuelva el ejercicio 22 si el empleado se jubila a los 52 años de edad.
24. Resuelva el ejercicio 22 considerando un interés técnico del 8% y que el primer pago se efectúa cuando el empleado tiene 30 años de edad.
25. Resuelva el ejercicio 22 suponiendo que la anualidad contingente es anticipada.
26. Para jubilar a uno de sus empleados, una compañía realiza 25 pagos bimestrales en una cuenta que le paga intereses del 10.5% nominal bimestral. ¿Cuánto dinero le entrega el día de su jubilación a los 55 años de edad si, además, le darán una pensión de \$43,500 al final de cada año mientras viva? Considere un tipo de interés técnico del 6.5% y que el primer depósito bimestral de \$3,500 se efectúa cuando el empleado cumple los 32 años de edad.
27. Resuelva el ejercicio 26 si el empleado se retira a los 50 años de edad.

En los ejercicios 28 a 53 seleccione la opción correcta. Justifique su elección.

28. ¿Cómo se denota el valor presente de una anualidad contingente ordinaria o vencida?
 a) \ddot{a}_x b) N_x c) ${}_nE_x$ d) D_x e) Otra: _____
29. El valor presente de una anualidad contingente anticipada de \$1.00 está dado por
 a) a_x b) ${}_nE_x$ c) \ddot{a}_x d) N_x e) Otra: _____
30. El valor de N_{56} con una tasa del 6.5% anual es:
 a) \$2'916,757.97 b) \$1'188,136.61 c) \$959,972.67 d) \$2'662,925.12 e) Otra: _____

31. El valor de conmutación N_{71} para una tasa de interés técnico del 4% es:
a) 391,733.78 b) 588,709.78 c) 3'671,606.43 d) 391,733.78 e) Otra: _____
32. ¿Cuánto pagará hoy el señor Hernández, de 34 años de edad, en sustitución de \$65,000 al final de cada año mientras esté con vida, considerando un interés técnico del 8% anual?
a) \$658,429.32 b) \$741,881.76 c) \$702,968.09 d) \$853,903.75 e) Otra: _____
33. ¿Cuál sería la respuesta en el ejercicio 32 si la renta vencida anual fuera de \$48,500 y el interés del 6.5% anual?
a) \$548,963.21 b) \$655,114.76 c) \$803,925.75 d) \$962,097.35 e) Otra: _____
34. En el ejercicio 32, ¿cuánto pagaría el señor Hernández al final de cada año, mientras viva, si en sustitución hoy paga \$958,000?
a) \$95,927.08 b) \$83,935.21 c) \$105,008.95 d) \$90,789.95 e) Otra: _____
35. ¿De cuánto podrá disponer al final de cada año, mientras viva, una persona de 35 años de edad que ahora realiza un pago único de \$1'125,000 en un fondo que bonifica un tipo de interés técnico del 4% anual?
a) \$26,120.85 b) \$40,785.08 c) \$38,921.01 d) \$63,940.95 e) Otra: _____
36. Resuelva el ejercicio 35 considerando un pago único de \$800,000 con intereses del 6.5% anual.
a) \$70,897.95 b) \$52,288.83 c) \$63,095.43 d) \$58,993.08 e) Otra: _____
37. Resuelva el ejercicio 35 si la persona tuviese 40 años de edad.
a) \$60,968.09 b) \$63,588.89 c) \$97,809.93 d) \$119,693.32 e) Otra: _____
38. ¿Cuánto es lo más que pueden prestarle a una persona con 28 años de edad si estima que tiene y tendrá capacidad económica para abonar \$75,000 al final de cada año mientras viva? Suponga cargos o intereses del 8% anual.
a) \$563,983.93 b) \$1'098,329.42 c) \$877,560.60 d) \$750,981.75 e) Otra: _____
39. ¿De cuánto sería el préstamo en el ejercicio 38 si el individuo tiene 38 años de edad y le cargan un interés técnico del 4%?
a) \$968,316.95 b) \$1'500,093.08 c) \$1'158,309.91 d) \$1'360,061.03 e) Otra: _____
40. ¿Cuánto le prestarían a la persona del ejercicio 38 si puede abonar \$100,000 al final de cada año con intereses del 6.5% anual?
a) \$1'198,493.48 b) \$969,369.48 c) \$1'313,158.16 d) \$1'593,098.43 e) Otra: _____
41. ¿De cuánto es la prima única que la Distribuidora de Automóviles del Centro debe otorgar a un empleado a su retiro a los 50 años de edad si en su plan de pensiones están contemplados pagos de \$70,000 al final de cada año, mientras viva, con intereses del 4% anual?
a) \$1'059,052.80 b) \$1'263,921.03 c) \$993,870.48 d) \$1'198,935.31 e) Otra: _____
42. Resuelva el ejercicio 41 suponiendo que el empleado se jubila a los 54 años de edad y los intereses son del 6.5% anual.
a) \$825,429.30 b) \$760,713.24 c) \$963,278.45 d) \$1'069,785.43 e) Otra: _____

43. En el ejercicio 41, ¿de cuánto serán los 60 abonos mensuales en un fondo si los intereses que bonifica son del 9.6% nominal mensual, el primero se realiza 8 años antes del retiro y la tasa de interés técnico es del 8%?
- a) \$9,629.48 b) \$15,643.60 c) \$10,292.33 d) \$11,697.00 e) Otra: _____
44. ¿Cuándo debe comenzar a depositar \$11,045 al inicio de cada bimestre con intereses del 11.53% anual, capitalizable por bimestre, una empresa para jubilar a uno de sus empleados cuando cumpla 56 años de edad si tiene contemplados \$60,000 al final de cada año mientras viva, con un tipo de interés técnico del 8% anual?
- a) 35 bimestres antes b) 28 bimestres antes c) 6 años antes d) 39 bimestres antes e) Otra: _____
45. En el ejercicio 44, ¿cuándo comenzaría si los depósitos son trimestrales y el pago al final de cada año es de \$70,000 con un tipo del 6.5% anual?
- a) 35 trimestres antes b) 37 trimestres antes c) 10 años antes d) 31 trimestres antes e) Otra: _____
46. ¿Cuánto recibirá cada mes, al final, el empleado del ejercicio 44 si el día de su retiro le dan \$100,000?
- a) \$4,257.61 b) \$5,008.07 c) \$4,098.62 d) \$3,955.50 e) Otra: _____
47. Resuelva el ejercicio 44 considerando que la anualidad contingente es anticipada y que se hace un pago menor al comenzar.
- a) 35 bimestres antes b) 38 bimestres antes c) 6 años antes d) 40 bimestres antes e) Otra: _____
48. ¿Cuánto dinero está recibiendo cada año, al final, desde el día de su retiro a los 60 años de edad un empleado si la compañía destinó \$725,000 para tal propósito y la tasa de interés técnico anual es del 4%?
- a) \$65,921.36 b) \$60,158.43 c) \$63,207.48 d) \$61,508.91 e) Otra: _____
49. En el ejercicio 48, ¿cuánto recibirá el empleado si el interés fuera del 6.5%?
- a) \$80,063.93 b) \$75,664.03 c) \$74,910.98 d) \$70,921.33 e) Otra: _____
50. El señor Flores recibió el 25% de los \$485,000 que le correspondían por su jubilación a los 43 años de edad y el 75% restante en anualidades, la primera cuando contaba con 50 años de edad, hasta su fallecimiento. ¿Cuánto le dan cada año si el tipo de interés es del 8% anual?
- a) \$58,493.67 b) \$61,429.31 c) \$63,095.38 d) \$62,908.27 e) Otra: _____
51. Resuelva el ejercicio 50 suponiendo que el señor Flores se retira a los 45 años de edad y los intereses son del 4% anual.
- a) \$29,375.23 b) \$30,627.40 c) \$32,337.16 d) \$28,202.69 e) Otra: _____
52. Si a un empleado le corresponden \$463,000 el día de su retiro, a los 46 años de edad, pero la empresa le ofrece \$60,000 anuales a partir de cuando cumpla los 53, ¿qué le conviene más si los intereses son del 6.5% anual?
- a) La primera b) La segunda c) Son iguales d) Es indiferente e) Otra: _____
53. Resuelva el ejercicio 52 suponiendo que la compañía le ofrece \$50,000 anuales a partir de los 50 años de edad.
- a) La primera b) La segunda c) Son iguales d) Es indiferente e) Otra: _____

Conclusiones

Al terminar con el estudio de este capítulo, usted estará capacitado para:

- Calcular la probabilidad de un evento.
- Obtener la probabilidad de la unión y conjunción de dos o más eventos.
- Distinguir los enfoques clásico, empírico y subjetivo en el cálculo de probabilidades.
- Evaluar la esperanza matemática o el valor esperado, y el precio justo.
- Calcular el valor presente de un pago contingente.
- Leer e interpretar los valores de una tabla de mortalidad.
- Utilizar los valores de una tabla de mortalidad para hallar el valor actual de un pago contingente y para evaluar probabilidades de vida.
- Obtener el valor presente de rentas vitalicias en las anualidades contingentes, vencidas y diferidas.

Conceptos importantes

Esperanza matemática o valor esperado,
y precio justo
Eventos independientes y mutuamente
excluyentes
Experimento, espacio muestral y evento
Factor de actualización demográfico-
financiero y de actualización financiera
pura

Probabilidad de un evento
Rentas vitalicias y anualidades contingentes
Tabla de mortalidad, probabilidad de estar
con vida en el futuro y valores o símbolos
de conmutación
Valor presente de un pago contingente

